КВАНТ

ИЮЛЬ АВГУСТ 2002 № 4

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

2 Вакуум – основная проблема фундаментальной физики. *И.Розенталь, А.Чернин*

5 Уравнения Пелля (продолжение). *А.Спивак*

МЫ ВСЕ УЧИЛИСЬ...

12 Зачем они приходят в этот мир?.. *С.Кротов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

16 Задачи М1826–М1830, Ф1833–Ф1837

17 Решения задач М1801–М1810, Ф1818–Ф1822

«КВАНТ» ДЛЯ «МЛАДШИХ» ШКОЛЬНИКОВ

25 Задачи

26 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

26 Какая геометрия нужна пассажирам метро? *С.Богданов, С.Дворянинов, З.Краутер*

31 Встреча в пути. *С.Варламов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

32 Самосовмещения

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

35 Эта современная древняя оптика. *Т.Ханнанова, Н.Ханнанов*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

38 Прямоугольник, вписанный в окружность. *А.Карлюченко, Г.Филипповский*

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

40 Под давлением лунного света. *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

42 Цепочка тетраэдров . *В.Залгаллер*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

44 Нелинейные элементы в электрических цепях. *В.Можаев*

47 Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды. *Э.Готман*

ОЛИМПИАДЫ

52 LXV Московская математическая олимпиада

53 Избранные задачи Московской физической олимпиады

56 Ответы, указания, решения

Наши наблюдения (37)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье о вакууме*

II *Кванты Интернета*

III *Шахматная страничка*

IV *Коллекция головоломок*

Компания Sakhalin Energy («Сахалинская Энергия») выписывает сто экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Частный предприниматель Русинович В.В. выписывает пятьдесят экземпляров журнала «Квант» для школ Сахалина.

Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.Р.Зильберман, С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров (*заместитель главного редактора*), В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (*заместитель главного редактора*), И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Смородинский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2002, Президиум РАН, Фонд Осипьяна, «Квант»

Вакуум — основная проблема фундаментальной физики

И.РОЗЕНТАЛЬ, А.ЧЕРНИН

Две с половиной тысячи лет назад греческие философы Левкипп и Демокрит выдвинули гипотезу: мир состоит из частиц – атомов – и разделяющей их пустоты. В рамках этой гипотезы атомы представлялись как мельчайшие неделимые частицы, а пустота понималась буквально: «ничто». Последующее развитие физики существенно изменило содержание этих понятий, при этом термин «атом» сохранился, а понятие «пустота» совершило длинный и тернистый путь, постепенно превращаясь в очень легкую материю, которую еще в XIX столетии называли эфиром, а сейчас называют вакуумом и считают фундаментом современной физики.

Определение вакуума

Отметим, что понятие абсолютной пустоты вошло в противоречие с экспериментом в средние века, когда начались первые наблюдения световых явлений. Свет взаимодействовал с окружающей средой – интерференция и дифракция, – и это доказало, что не существует абсолютной пустоты. Поэтому были выдвинуты две основные гипотезы: существует особое вещество, названное эфиром, и оно обусловливает наблюдаемые световые эффекты (интерференцию и дифракцию). Первоначально эфир представляли как упругую механическую среду, а распространение световых волн уподобляли распространению звука. Однако эта концепция встретилась с большими трудностями, которые особенно проявились в конце XIX столетия, когда Майкельсон экспериментально доказал, что скорость света не зависит от движения источников и приемников света (т.е. от выбора системы отсчета). Эти опыты противоречили гипотезе эфира, определяющего привилегированную систему отсчета, в которой только и справедливы законы оптики. В начале XX столетия была создана теория относительности (Эйнштейн, Пуанкаре, Лоренц), которая отвергла гипотезу существования пустого пространства. Новое состояние было названо вакуумом. Согласно квантовой теории поля, вакуум рассматривается не как простое отсутствие поля, а как одно из возможных состояний поля. Последние события в космологии дают все основания полагать, что во Вселенной доминирует вакуум и плотность его энергии превосходит все «обычные» формы космической материи вместе взятые.

Уравнение состояния вакуума имеет вид

$$p = -\varepsilon ,$$

где p – давление, ε – объемная плотность энергии. Заметим, что внешне это уравнение напоминает известное уравнение состояния идеального газа. Например, для нерелятивистского одноатомного газа

$$U = \frac{3}{2} pV \text{ , или } p = \frac{2}{3}\varepsilon ,$$

а для газа фотонов

$$p = \frac{\varepsilon}{3} .$$

Однако уравнение состояния вакуума кардинально отличается от этих уравнений наличием в нем знака «минус». Как доказывается в квантовой теории поля, это уравнение состояния уникально, оно единственное, при котором сохраняется основной закон механики – закон инерции. Потери энергии на трение частицы с вакуумной материей будут точно компенсироваться воздействием давления.

Разумеется, эта особенность сохраняется лишь при условии равномерности и прямолинейности движения. Если, например, частица движется по окружности, то вакуум будет изменять характеристики ее движения. Воздействие на частицу оказывают такие «составляющие» вакуума, как «нулевые» (квантовые) колебания электромагнитного поля и рождающиеся на короткое время ($\sim \hbar/\left(mc^2\right)$, где $\hbar$ – постоянная Планка, m – масса частицы, c – скорость света) пары частиц (например, электрон плюс позитрон) – такие частицы называют виртуальными. Полная компенсация потерь энергии возможна лишь в том случае, если частица движется прямолинейно и равномерно. Если же частица движется по окружности, то происходит очень небольшой (из-за малости значения $\hbar/\left(mc^2\right)$) сдвиг энергии. Именно это наблюдается, например, в атоме водорода. Сдвиг уровней энергии атома водорода (лэмбовский сдвиг) вычислен и измерен до десятого знака, при этом теоретические и экспериментальные значения прекрасно согласуются.

Этот пример (далеко не единственный) свидетельствует о существовании вакуума, взаимодействующего с частицами. И здесь возникает естественный вопрос (быть может, основной вопрос фундаментальной физики): почему вакуумная материя практически не влияет на макроскопические явления?

Сейчас этот вопрос сделался особенно актуальным в связи с регистрацией новых наблюдательных данных о вспышках сверхновых звезд, находящихся на расстояниях в сотни и тысячи мегапарсек (ранее были доступны расстояния 10–20 мегапарсек). Полученные данные неопровержимо свидетельствуют, что расширение Вселенной не замедляется, а ускоряется! Из этого неизбежно следует вывод, что во Вселенной доминирует вакуум; по плотности он превосходит все «обычные» формы космической материи вместе взятые. Большая плотность вакуума приводит к ускорению расширения (т.е. к эффекту «антигравитации») именно благодаря приведенному выше необычному уравнению состояния вакуумной материи.

Метагалактика и Вселенная

Попытаемся четко определить понятия, с которыми нам придется встречаться. Прежде всего приведем порядок величин, с которыми мы будем иметь дело:

Название объекта	Размеры, см
Звезда	10^{11}
Галактика	10^{22}
Метагалактика	10^{28}

Размеры Метагалактики – это размеры, в настоящее время максимально доступные для непосредственных измерений. Поэтому, наверное, общепринято называть ее размер $R_{\text{М}}$ размером Вселенной, или Мира. На наш взгляд, весь исторический опыт указывает, что наибольшие доступные размеры определяются техникой (или уровнем цивилизации). Например, еще несколько сот лет назад можно было с уверенностью определить лишь размеры Земли ($\sim 10^9$ см). Следовательно, можно сказать, что величина $R_{\text{М}}$ есть наибольшее измеряемое сейчас расстояние. Вселенная же – существенно больший объект. В настоящее время есть косвенные указания, что размеры Вселенной на много порядков превышают $R_{\text{М}}$.

Космологическая постоянная

Мы не имеем возможности изложить здесь подробно общую теорию относительности (ОТО). Заметим лишь, что теоретическая основа космологии основана на ОТО. (Наиболее простое изложение ОТО и ее приложений к космологии содержится в статье И.Хрипловича «Общая теория относительности»: журнал «Квант», 1999, № 4. – *Прим. ред.*)

Отметим центральную идею ОТО. Эта теория должна отразить особенности гравитации и, по мысли Эйнштейна, быть основой космологии и специальной теории относительности. Все эти идеи нашли свое воплощение в современной науке, исключая одно важное обстоятельство: до сих пор не построена последовательная квантовая теория гравитации.

Одной из важных особенностей созданной Эйнштейном ОТО является идея существования во Вселенной новой гипотетической материи, которую называют космическим вакуумом. Плотность энергии ε_Λ такого вакуума (Λ-члена) равна

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G},$$

где Λ – введенная Эйнштейном космологическая постоянная, G – известная гравитационная постоянная.

Космологическая постоянная была введена Эйнштейном, чтобы обеспечить неизменность (постоянство) Вселенной во времени. Однако развитие ОТО (Фридман) и проведенные наблюдения (Хаббл) продемонстрировали переменность Метагалактики. Два объекта в пределах Метагалактики, разделенные расстоянием r, удалялись друг от друга со скоростью

$$v = H(t)\,r.$$

В нашу эпоху ($t = t_0$) постоянная $H(t_0)$ (названная постоянной Хаббла) равна

$$H(t_0) \sim 10^{-18}\ \text{с}^{-1}.$$

В Метагалактике, при $t = t_0$, $|\Lambda| < 10^{-56}$ см$^{-2}$. Однако во Вселенной вне Метагалактики величина $|\Lambda|$ может быть очень большой и определять все процессы, в ней происходящие.

Таким образом, построить модель Метагалактики (которая во времена Эйнштейна отождествлялась со Вселенной), согласующуюся с наблюдательными данными и гипотезой о доминировании Λ-члена, оказалось невозможным, и Эйнштейн считал введение его в ОТО самой большой ошибкой в своей научной деятельности. Как оказалось далее, такая отрицательная самооценка также была ошибочной.

Отметим, что космологическая постоянная описывает гравитационные силы притяжения (если $\Lambda < 0$) или отталкивания ($\Lambda > 0$); соответствующие ей силы являются дополнительными к ньютоновским силам притяжения. Введение же Λ-члена означает введение новых сил гравитации.

Влияние вакуума на динамику Метагалактики может установить только опыт. Чтобы упростить изложение экспериментов, проведенных в последнее время и оказавших подлинно революционное влияние на космологию, мы используем нерелятивистское приближение анализа расширения Метагалактики (Милн и Маккри, начало 1930-х годов). Допустим, что Метагалактика имеет шарообразную форму с равномерной плотностью ρ_G. Тогда уравнение движения для частицы на поверхности шара выглядит так:

$$R'' = -\frac{GM}{R^2},$$

где R – радиус шара, а $M = \rho_G\,(4\pi/3)\,R^3$ – его полная масса. В первом приближении можно положить, что масса M остается неизменной, и тогда решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = E,$$

где E – постоянная интегрирования. Последнее уравнение имеет простую интерпретацию – оно отражает закон сохранения энергии для изолированного элемента Метагалактики с единичной массой. Оправданием этого вывода является то, что он приводит к решению, отвечающему основному принципу космологии – закону Хаббла

$$v_{12} = H(t) r_{12},$$

где v_{12} и r_{12} – относительная скорость и расстояние между двумя элементами (*1*, *2*) Метагалактики. Необходимо подчеркнуть, что приведенное выше соотношение справедливо лишь для времени $t \approx t_0$. При временах $t \ll t_0$ Метагалактика имеет меньшие размеры, и при вычислении расстояния r_{12} следует использовать более сложные соотношения.

Вакуум и другие формы космической материи

По наблюдательным данным о сверхновых, о которых мы упоминали, плотность вакуума ρ_v превышает суммарную плотность остальных компонентов космической среды: темного вещества (ρ_d), светящегося вещества звезд и галактик (ρ_p) и излучения (ρ_r).

Обычно плотности компонентов относят к так называемой критической плотности $\rho_c = (3/8)(H^2/G) = 0{,}6 \cdot 10^{-29}$ г·см$^{-3}$. Теперь приведем последние экспериментальные данные для этих отношений:

$$\rho_v/\rho_c = 0{,}7 \pm 01,$$

$$\rho_d/\rho_c = 0{,}3 \pm 01,$$

$$\rho_p/\rho_c = 0{,}02 \pm 0{,}01,$$

$$\rho_r/\rho_c \sim 10^{-4}.$$

Здесь нужно сделать одно замечание, Иногда темную материю, состоящую из неизвестных электронейтральных частиц, включают в Λ-член. Это абсолютно неверно. Темная материя занимает периферическую часть галактик и, следовательно, распределена (в отличие от вакуума) крайне неравномерно, а Λ-член занимает почти равномерно всю Галактику. Реальная материя состоит из известных частиц (протонов, нейтронов, электронов, фотонов и других частиц). Однако упомянутая путаница не совсем безосновательна. Вопрос «из чего» состоит Λ-член, вероятно, основной в физике вакуума и также далек от окончательного решения.

Но одно условие остается – Λ-член (который иногда отождествляют с вакуумом), если и состоит из частиц, то последние должны обладать уникальными свойствами: отсутствием спина (скалярные частицы), стабильностью и электронейтральностью. В противном случае не будет выполняться основное условие $p = -\varepsilon$, и вакуум превратится в отвергнутый давно эфир. Оказывается, найти такие частицы среди четырехсот уже обнаруженных на ускорителях частиц совсем не просто. Наиболее подходящим кандидатом в частицы вакуума являются частицы Хиггса, которые еще уверенно не обнаружены непосредственно, но их существование является необходимым условием для формирования теории, объединяющей электромагнитное и слабое взаимодействия. (По самым последним и не очень надежным данным, полученным на ускорителе LEP, масса Хиггс-бозона порядка 150 ГэВ.)

Проблема природы темной материи также весьма интересна, хотя темная материя не так универсальна, как вакуум, и, вероятно, не играет в эволюции Вселенной столь принципиальной роли.

Вакуум является основой еще одного фундаментального вопроса: почему его плотность $\rho_v < 10^{-29}$ г·см$^{-3}$ столь мала? Оценки, основанные на соображениях размерности, указывают, что значение ρ_v должно быть на много десятков порядков больше. Действительно,

$$\rho_v \approx m\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{-3},$$

поэтому если даже принять $m = 10^{-24}$ г (протон), то приходим к значению $\rho_v \sim 10^{16}$ г·см$^{-3}$. Если же полагать, что масса m определяется фундаментальными постоянными $\hbar$, G и c, то плотность должна была бы достигнуть уж совсем фантастической величины.

Заключение

Интерпретация различия между этими оценками и реальным значением ρ_v является, пожалуй, наиболее интригующей проблемой фундаментальной физики. По нашему мнению, возможно, что вакуум Вселенной состоит из массивных частиц и что его плотность весьма велика. Однако при образовании Метагалактики происходит фазовый переход, который существенно уменьшает массу вакуумных частиц и трансформирует их энергию в реальные частицы и энергию их движения. Чрезвычайная малость массы вакуумных частиц определяется необходимостью длительного существования Метагалактики для образования сложных форм материи.

Иллюстрация Л.Тишкова

Уравнения Пелля

А.СПИВАК

В прошлом номере журнала были сформулированы, но не доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Уравнение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1;\ 0)$ при помощи правила $(x;\ y) \to (x+2y;\ x+y)$.*

Теорема 3. *Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений $(3;\ 1)$ и $(5;\ 3)$ при помощи правила $(x;\ y) \to (3x+4y;\ 2x+3y)$.*

Теорема 5. *Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения $(1;\ 0)$ при помощи правила $(x;\ y) \to (2x+3y;\ x+2y)$.*

Теорема 7. *Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из решения $(0;\ 1)$ при помощи правила $(x;\ y) \to (x+y;\ x)$.*

Можно было бы рассмотреть еще несколько примеров и сформулировать много аналогичных теорем, но пора переходить к более общим рассмотрениям.

Формула $\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2$

Следующее вычисление – пожалуй, самое главное в теории уравнений Пелля:

$$\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) = x^2z^2 - dy^2z^2 - dx^2t^2 + d^2y^2t^2 =$$
$$= x^2z^2 + 2xzdyt + d^2y^2t^2 -$$
$$- dy^2z^2 - 2dyzxt - dx^2t^2 = (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.$$

А вот как можно получить ту же формулу, если разложить разность квадратов на (иррациональные!) множители и переставить их разумным образом:

$$\left(x^2 - dy^2\right)\left(z^2 - dt^2\right) =$$
$$= \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(z + t\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) =$$
$$= \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(z + t\sqrt{d}\right)\cdot\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) =$$
$$= \left(xz + dyt + (xt + yz)\sqrt{d}\right)\cdot\left(xz + dyt - (xt + yz)\sqrt{d}\right) =$$
$$= (xz + dyt)^2 - d(xt + yz)^2.$$

Честно говоря, эта выкладка даже длиннее предыдущей. Но она, надеемся, гораздо прозрачнее. Зачем нам нужна доказанная формула? Чтобы строить из одних решений другие! Точнее говоря, формула доказывает следующую важную теорему.

Теорема 8. *Если $x^2 - dy^2 = a$ и $z^2 - dt^2 = b$, то пара чисел $(X;\ Y) = (xz + dyt;\ xt + yz)$ удовлетворяет равенству $X^2 - dY^2 = ab$.*

И опять сформулируем и не докажем теорему о том, как устроено множество решений уравнения Пелля.

Теорема 9. *Если a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$, то уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1;\ 0)$ при помощи правила $(x;\ y) \to (ax + dby;\ bx + ay)$.*

Упражнения

21. Уравнение а) $x^2 - 2y^2 = 14$; б) $x^2 - 2y^2 = 23^{23}$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а уравнение в) $\left|x^2 - 2y^2 - 1004\right| = 1001$ не имеет ни одного. Докажите это.

22. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого представим в виде суммы квадратов 11 последовательных а) целых; б) натуральных чисел. в) Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, квадрат каждого из которых представим в виде суммы квадратов 11 последовательных натуральных чисел.

23. Пусть a, b, x, y, z, t – рациональные числа, $x^2 + ay^2 + bz^2 + abt^2 = 0$ и хотя бы одно из чисел x, y, z и t отлично от нуля. Докажите, что существуют такие рациональные числа u, v и w, что $u^2 + av^2 + bw^2 = 0$ и $u^2 + v^2 + w^2 \neq 0$.

Теорема существования

Теорема 10. *Для любого натурального числа d, не являющегося квадратом, существуют такие натуральные числа x и y, что $x^2 - dy^2 = 1$.*

Вместе взятые, теоремы 8, 9 и 10 позволяют довольно ясно представить себе структуру множества решений уравнения Пелля. В одном из ближайших номеров журнала мы изложим четыре доказательства теоремы 10. А здесь у нас хватит сил только на то, чтобы доказать теоремы 2, 3, 5, 7 и 9. Впрочем, мы это сделаем двумя способами: сначала обойдемся без помощи иррациональностей, а затем при помощи иррациональностей изложим (по сути то же самое) доказательство и даже расскажем о решениях в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Упражнения

24. Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, $c \neq 0$ и уравнение $x^2 - dy^2 = c$ имеет хотя бы одно

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3.

решение в целых числах, то это уравнение имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Выведите это из утверждения теоремы 10.

25. а) Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких целых a уравнение $a\left(x^2-1\right)=y^2$ имеет бесконечно много решений в целых числах. б) Пусть a – целое число. Пользуясь утверждением теоремы 10, выясните, при каких натуральных d уравнение $x^2-dy^2=a^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

26. Пусть n – натуральное число, $n>1$. Докажите, что уравнение а) $x^2-\left(n^2-1\right)y^2=1$; б) $x^2-\left(n^2+1\right)y^2=1$; в) $x^2-\left(n^2+2\right)y^2=1$; г) $x^2-\left(n^2-2\right)y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

27. Докажите, что при любом натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2$; б) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2$;

в) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2+1$; г) $\left(a^2-1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$;

д) $\left(a^2+1\right)\left(x^2-1\right)=y^2-1$; е) $\left(a^2-1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

28. Докажите, что ни при каком натуральном a уравнение

а) $\left(a^2+1\right)\left(x^2+1\right)=y^2-1$;

б) $x^2=(4a-1)\left(y^2+1\right)$; в) $a\left(x^2-1\right)=y^2+1$

не имеет решений в целых числах. *Указание к пунктам б) и в).* Воспользуйтесь тем, что число вида y^2+1 не может делиться на натуральное число вида $4n-1$. Доказательство последнего факта можно прочесть, например, в статье «Суммы квадратов и целые гауссовы числа» в «Кванте» №3 за 1999 год.

29. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много четверок целых чисел, в каждой из которых числа попарно различны и таковы, что $x+y+z+t=x^3+y^3+z^3+t^3=2$. б) Уравнение $xy(x+2)(y+2)=z(z+2)$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. в) Существует бесконечно много таких троек натуральных чисел, что произведение любых двух из этих чисел на единицу больше квадрата натурального числа. г) Для любого натурального числа a система уравнений

$$\begin{cases} xy-1=a^2, \\ yz-1=u^2, \\ zx-1=v^2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, y, z, u и v. д) Для любого натурального числа n существует бесконечно много таких наборов из $k=3n^2-1$ последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов сама является квадратом натурального числа. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой 10.

30 * (М618). Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких натуральных n, что $n!$ делится на n^2+1. б) Для любого числа $\alpha>0$ существует бесконечно много таких натуральных n, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1.

Доказательства теорем

Теорема 2

Пусть X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=X, \\ x+y=Y \end{cases}$$

и решим ее:

$$\begin{cases} x=2Y-X, \\ y=X-Y. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$x^2-2y^2=(2Y-X)^2-2(X-Y)^2=$$
$$=4Y^2-4XY+X^2-2\left(X^2-2XY+Y^2\right)=-\left(X^2-2Y^2\right).$$

Понимаете, в чем идея? Каждой паре $(X;\ Y)$, являющейся решением уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$, мы сопоставляем ее «предшественницу» – пару $(x;y)=(2Y-X;\ X-Y)$, удовлетворяющую равенству $x^2-2y^2=\mp1$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа и $X^2-2Y^2=\pm1$, то $2Y-X$ и $X-Y$ – неотрицательные числа, причем $X-Y<Y$.*

Доказательство. Будем рассуждать «от противного». Если $2Y-X<0$, то $X>2Y$ и $X^2-2Y^2>4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что противоречит равенству $X^2-2Y^2=\pm1$. Если $X-Y<0$, то $X<Y$ и $X^2-2Y^2<Y^2-2Y^2=-Y^2\le-1$. Наконец, если $X-Y\ge Y$, то $X\ge2Y$ и $X^2-2Y^2\ge4Y^2-2Y^2=2Y^2\ge2>1$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Эта лемма – основа доказательства теоремы 2. А именно, взяв любую пару $(X;\ Y)$ натуральных чисел, удовлетворяющую равенству $X^2-2Y^2=\pm1$, мы можем рассмотреть ее предшественницу – пару $(x;\ y)$. При этом $y<Y$. Если x и y – натуральные числа, то у пары $(x;\ y)$ есть своя предшественница, у той – своя, и так далее. Бесконечно этот процесс продолжаться не может: неравенство $y<Y$ гарантирует, что начатый с пары $(X;\ Y)$ процесс образования предшественниц оборвется не более чем через Y шагов. (Любитель строгости сказал бы, что здесь мы воспользовались отсутствием бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел.)

В какой момент обрывается процесс образования пар-предшественниц? Очевидно, когда очередная пара $(x;\ y)$ состоит не только из натуральных чисел, проще говоря, когда одно из чисел x и y равно нулю. Число x равняться нулю не может, а вот равенство $x^2-2\cdot0^2=\pm1$ возможно. И возможно оно лишь при $x=1$ (напоминаем: $x\ge0$).

Итак, для любого решения $(X;\ Y)$ уравнения $X^2-2Y^2=\pm1$ процесс образования пар-предшественниц остановится, дойдя до пары $(1;\ 0)$. Проследив этот процесс в обратном направлении, т.е. не от пары $(X;\ Y)$ к паре $(1;\ 0)$, а от пары $(1;\ 0)$ к паре $(X;\ Y)$, мы видим, что он происходит по формуле $(x;\ y)\to(x+2y;\ x+y)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Упражнения

31. На листе клетчатой бумаги размером 32×40 клеток нарисован прямоугольный треугольник, вершины которого расположены в узлах клеток. На его катетах как на гипотенузах во внешнюю сторону нарисованы равнобедренные прямоугольные треугольники. Оказалось, что разность площадей этих двух треугольников отличается от площади исходного треугольника менее чем на $1/2$. Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

32. Как известно, $1 + 2 = 3$. Легко проверить также, что $1 + 2 + 3 + \ldots + 13 + 14 = 105 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$. Найдите все такие n, что сумма первых n натуральных чисел равна сумме нескольких последующих.

Теорема 3

Доказательство теоремы 3 похоже на доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 3x + 4y = X, \\ 2x + 3y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 3X - 4Y$ и $y = 3Y - 2X$, замечаем, что

$$x^2 - 2y^2 = (3X - 4Y)^2 - 2(3Y - 2X)^2 = X^2 - 2Y^2,$$

а затем формулируем и доказываем следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - 2Y^2 = 7$, и выполнено неравенство $Y \ge 6$, то $3X - 4Y$ и $3Y - 2X$ – тоже натуральные числа, причем $3X - 4Y < X$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $3X - 4Y \le 0$, то $X \le \frac{4}{3}Y$ и $7 = X^2 - 2Y^2 \le \frac{16}{9}Y^2 - 2Y^2 < 0$. Если $3Y - 2X \le 0$, то $X \ge \frac{3}{2}Y$ и $X^2 - 2Y^2 \ge \frac{9}{4}Y^2 - 2Y^2 = \frac{Y^2}{4} > 7$. Наконец, если $3X - 4Y \ge X$, то $X \ge 2Y$ и $X^2 - 2Y^2 \ge 4Y^2 - 2Y^2 = 2Y^2 > 7$, что вновь дает противоречие.

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится почти так же, как и доказательство теоремы 2. Чтобы понять, где может остановиться процесс образования пар-предшественниц, достаточно разобрать случаи $Y = 1, 2, 3, 4, 5$. Сделав это, вы найдете, как и следовало ожидать, два решения: $(3; 1)$ и $(5; 3)$.

Теорема 5

Доказательство теоремы 5 похоже на доказательства теорем 2 и 3. Мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = X, \\ x + 2y = Y, \end{cases}$$

находим из нее $x = 2X - 3Y$ и $y = 2Y - X$, замечаем, что

$$x^2 - 3y^2 = (2X - 3Y)^2 - 3(2Y - X)^2 = X^2 - 3Y^2,$$

а затем формулируем и не доказываем (надеясь на читателя) следующую лемму.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, причем $X^2 - 3Y^2 = 1$, то $2X - 3Y$ и $2Y - X$ – неотрицательные числа, причем $2Y - X < Y$.*

Окончание доказательства – как в теореме 2.

Теорема 7

Из системы

$$\begin{cases} x + y = X, \\ x = Y \end{cases}$$

находим $x = Y$ и $y = X - Y$. Очевидно,

$$x^2 - xy - y^2 = Y^2 - Y(X - Y) - (X - Y)^2 =$$

$$= Y^2 - XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = -\left(X^2 - XY - Y^2\right).$$

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$, то $X \ge Y$, причем равенство выполнено лишь в случае $X = Y = 1$.*

Доказательство. Как всегда, рассуждаем «от противного». Если $X < Y$, то $X^2 - XY - Y^2 < -Y^2 \le -1$, что несовместимо с условием $X^2 - XY - Y^2 = \pm 1$. Если же $X = Y$, то $X^2 - XY - Y^2 = -X^2$. Очевидно, $-X^2$ не равняется 1, а $-X^2 = -1$ лишь при $X = 1$. Лемма доказана. Теперь читатель, надеемся, самостоятельно завершит доказательство теоремы 7.

Упражнение 33 (М39). а) Целые неотрицательные числа x, y удовлетворяют уравнению $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (где m – данное натуральное число, $m > 1$) тогда и только тогда, когда x и y – соседние члены последовательности $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = m$, $a_3 = m^2 - 1$, $a_4 = m^3 - 2m$, $a_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, ..., в которой $a_{k+2} = ma_{k+1} - a_k$ для всех $k \ge 0$. Докажите это.
б) Рассмотрим случай $m = 3$. Очевидно, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$, $a_4 = 3 \cdot 8 - 3 = 21$. Возникает гипотеза, что для любого n число a_n – это $(2n)$-й член последовательности Фибоначчи. Докажите эту гипотезу.

Теорема 9

Идея доказательства уже была применена нами четырежды. Применим же ее в пятый раз. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} xz + dyt = X, \\ xt + yz = Y. \end{cases}$$

Чтобы найти x, домножим первое уравнение на z, второе – на dt и вычтем затем второе уравнение из первого:

$$zX - dtY = xz^2 - dxt^2 = x,$$

поскольку $z^2 - dt^2 = 1$. Аналогично, чтобы найти y, домножим первое уравнение на t, второе на z и вычтем второе уравнение из первого:

$$Xt - Yz = dyt^2 - yz^2,$$

откуда $y = Yz - Xt$.

Лемма. *Если X, Y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $X^2 - dY^2 = 1$, а z – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число t, что $z^2 - dt^2 = 1$, то $zX - dtY \ge 0$ и $Yz - Xt \ge 0$, причем $Yz - Xt < Y$.*

Доказательство. Рассуждаем «от противного». Если $zX - dtY < 0$, то $X < \frac{dtY}{z}$ и, следовательно,

$$1 = X^2 - dY^2 < \left(\frac{dtY}{z}\right)^2 - dY^2 = dY^2\,\frac{dt^2 - z^2}{z^2} < 0.$$

Если $Yz - Xt < 0$, то

$$X^2 - dY^2 > \frac{Y^2z^2}{t^2} - dY^2 = \frac{Y^2z^2 - dY^2t^2}{t^2} = \frac{Y^2}{t^2} \ge 1.$$

(Последнее неравенство следует из того, что наименьшему z отвечает и наименьшее t.) Если же $Yz - Xt \geq Y$, то $X \leq (Yz - Y)/t$ и

$$X^2 - dY^2 \leq \frac{Y^2(z-1)^2}{t^2} - dY^2 =$$

$$= Y^2\frac{z^2 - 2z + 1 - dt^2}{t^2} = Y^2\frac{2-2z}{t^2} \leq 0 .$$

Лемма доказана. Дальнейшее доказательство проводится в точности так, как доказательство теоремы 2.

Упражнения

34*. Докажите следующие утверждения. а) Для любого простого числа p существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{p}$. б) Если p – нечетное простое число, n – натуральное, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на p^n, то существуют такие целые числа z и t, что $\left(x + p^n z\right)^2 - 34\left(y + p^n t\right)^2 + 1$ делится на p^{n+1}. в) Если $n > 2$ – натуральное число, x и y – такие целые числа, что $x^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}, то число $\left(x + 2^{n-1}\right)^2 - 34y^2 + 1$ делится на 2^{n+1}. г) Если m_1 и m_2 – взаимно простые натуральные числа, для которых существуют такие целые числа x_1, y_1, x_2 и y_2, что $x_1^2 - 34y_1^2 \equiv -1 \pmod{m_1}$ и $x_2^2 - 34y_2^2 \equiv -1 \pmod{m_2}$, то существуют такие целые числа x и y, что $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m_1 m_2}$. д) Для любого натурального m сравнение $x^2 - 34y^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах x и y. е) Уравнение $x^2 - 34y^2 = -1$ не имеет решений в целых числах.

Замечание. Ситуация, когда сравнения имеют решения, а уравнение не имеет, не столь уж редка. Например, для любого натурального числа m сравнение $(3x+1)(2x+1) \equiv 0 \pmod{m}$ имеет решения в целых числах, а уравнение $(3x+1)(2x+1) = 0$ не имеет целых решений. Тем интереснее знать, что 34 – наименьшее натуральное число d, для которого все сравнения вида $x^2 - dy^2 \equiv -1 \pmod{m}$ имеют решения, а уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ целочисленных решений не имеет. (Проверьте это!)

35. Докажите следующие утверждения. а) Если a, b – такие натуральные числа, что $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2001} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2}$, то $3a^2 - 2b^2 = 1$. б) Если a и b – такие натуральные числа, что $3a^2 - 2b^2 = 1$, то для некоторого нечетного натурального числа n имеем $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^n$.

36. Докажите следующие утверждения. а) Существует бесконечно много таких пар натуральных чисел a и b, что $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a. б) Если $x < y$ – натуральные числа и $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$, то $x = \varphi_{2n-1}$ и $y = \varphi_{2n+1}$, где n – некоторое натуральное число. в) Если a, b и $c = \dfrac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$ – натуральные числа, то $c = 3$. г) Если два натуральных числа таковы, что увеличенный на единицу квадрат любого из них делится на другое, то произведение этих чисел на единицу больше квадрата их разности. д) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -4$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это. е) Уравнение $x^2 - \left(n^2 - 4\right)y^2 = -1$ не имеет решений в натуральных числах при натуральном $n \neq 3$. Докажите это.

Указание. Воспользуйтесь утверждениями теоремы 10 и предыдущим пунктом.

37 (М1225). Докажите, что а*) если для натуральных чисел a и b число $\left(a^2 + b^2\right)/(ab - 1)$ натуральное, то оно равно 5; б) уравнение $x^2 - 5xy + y^2 + 5 = 0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

38. Для любого натурального n число $\left[\left(3 + \sqrt{11}\right)^{2n-1}\right]$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}. Докажите это.

39. Для любого (не)четного натурального n число

$$\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] - 1 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

является (упятеренным) квадратом натурального числа. Докажите это.

40. а) Существуют такие иррациональные числа $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, что ни при каких натуральных m и n целые части чисел α^m и β^n не совпадают. Докажите это. б) Придумайте такую последовательность иррациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, что равенство $\left[\alpha_r^m\right] = \left[\alpha_s^n\right]$, где r, s, m и n – натуральные числа, верно лишь при $r = s$ и $m = n$.

Уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$

Разберем еще один пример. Он, возможно, покажется вам слишком специальным. Но, в конце концов, если уравнение $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ никак не заинтересовало вас и вы уверены, что оно не заинтересует вас никогда, то перейдите сразу к следующему разделу статьи.

К уравнению $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ можно прийти, рассматривая 14-ю строку треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, **1001**, **2002**, **3003**, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1.

Коротко расскажем о числах сочетаний C_n^m тем, кто с ними еще не знаком. В n-й строке треугольника Паскаля на m-м месте стоит число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

причем нумерация чисел в каждой строке, как и нумерация самих строк, начинается с нуля. Основное правило образования треугольника Паскаля таково: *сумма любых двух соседних чисел некоторой строки равна числу следующей строки, которое расположено «ниже них и между ними»*; другими словами, для любых натуральных чисел m и m, где $m \leq n$, верно равенство

$$C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m .$$

Очевидно, 1001 + 2002 = 3003. Это означает, что $C_{14}^4 + C_{14}^5 = C_{14}^6$. Последнее равенство можно записать в виде

$$C_{15}^5 = C_{14}^6 .$$

И вообще, любое равенство вида $C_n^{m-2} + C_n^{m-1} = C_n^m$ можно записать в виде $C_{n+1}^{m-1} = C_n^m$.

Теорема 11. *Равенство $C_x^{y-1} = C_{x-1}^y$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = \varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и $y = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$, где k – некоторое натуральное число.*

Мы докажем это довольно неожиданное утверждение двумя способами. Первый заимствован из статьи А.Ширшова «Об уравнении $C_n^m = C_{n+1}^{m-1}$» («Квант» № 4 за 1977 год). Прежде всего выразим числа сочетаний через факториалы:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}=\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!}.$$

После очевидных преобразований получаем

$$xy=(x-y+1)(x-y).$$

Теперь применим некоторый специальный трюк. Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = ad$ и $y = bd$, где a и b взаимно просты. Подставив выражения для x и y в уравнение, после сокращения на d получим равенство

$$abd=(ad-bd+1)(a-b).$$

Поскольку числа $a-b$ и ab взаимно просты и поскольку числа d и $ad - bd + 1$ тоже взаимно просты, то

$$\begin{cases}ab=ad-bd+1,\\ d=a-b,\end{cases}\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases}a=b+d,\\ (b+d)b=(b+d)d-bd+1.\end{cases}$$

Последнее уравнение после упрощений приобретает вид

$$b^2+bd-d^2=1.$$

Его решения в натуральных числах нам известны из предыдущего номера журнала: $b=\varphi_{2k-1}$ и $d=\varphi_{2k}$, где k – натуральное число. Таким образом,

$$\begin{cases}x=ad=(\varphi_{2k-1}+\varphi_{2k})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1},\\ y=bd=\varphi_{2k-1}\varphi_{2k},\end{cases}$$

как и было обещано. Например, при $k = 1, 2, 3$ имеем, соответственно, $(x; y) = (2; 1), (15; 6), (104; 40)$.

Замечание. Строго говоря, надо бы проверить, что всякая пара чисел $(x;y)=(\varphi_{2k}\varphi_{2k+1};\varphi_{2k-1}\varphi_{2k})$ удовлетворяет равенству $(x-y+1)(x-y)=xy$. Немного подумав, можно понять, что это очевидно: двигаться «снизу вверх» по только что изложенному решению даже легче, чем «сверху вниз». Впрочем, можно обойтись и без использования интеллекта:

$$x-y=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=(\varphi_{2k+1}-\varphi_{2k-1})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}^2$$

и

$$x-y+1=\varphi_{2k}^2+1,$$

так что

$$(x-y+1)(x-y)=(\varphi_{2k}^2+1)\varphi_{2k}^2=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=xy.$$

(Мы воспользовались тождеством $\varphi_{2k}^2+1=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}$, которое является частным случаем тождества упражнения 20,а.)

Мы решили уравнение

$$(x-y+1)(x-y)=xy,$$

применив довольно неожиданный трюк. Но есть и другой – стандартный – способ. А именно, есть стандартная схема, по которой решают в целых числах уравнения второй степени. Давайте посмотрим, как эта схема работает. Первым делом раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2-3xy+y^2+x-y=0.$$

Теперь освободимся от членов первой степени. Для этого выполним замену $x = X + a$, $y = Y + b$, получив уравнение

$$X^2+2aX+a^2-3XY-3aY-3bX-3ab+Y^2+$$
$$+2bY+b^2+X+a-Y-b=0,$$

и приравняем коэффициенты при X и Y к нулю:

$$\begin{cases}2a-3b+1=0,\\ -3a+2b-1=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $a = -1/5$ и $b = 1/5$. При этих значениях a и b уравнение принимает вид

$$X^2-3XY+Y^2=\frac{1}{5},$$

где $X=x+\frac{1}{5}$ и $Y=y-\frac{1}{5}$. Домножив обе части уравнения на 20, получаем

$$20X^2-60XY+20Y^2=4,$$
$$5\left(4X^2-12XY+9Y^2\right)-25Y^2=4,$$
$$(5Y)^2-5(2X-3Y)^2=-4,$$
$$z^2-5t^2=-4,$$

где $z = 5Y = 5y - 1$ и $t = 2X - 3Y = 2x - 3y + 1$.

Пора воспользоваться следствием из теоремы 7. А именно, *все решения уравнения $z^2-5t^2=\pm 4$ в натуральных числах даются формулой* $(z;t)=(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1};\varphi_n)$. При этом знаку «+» соответствуют четные n, а знаку «–» – нечетные. Осталось понять, при каких нечетных n число $z=\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}$ дает остаток 4 при делении на 5. Выпишем остатки от деления нескольких первых чисел Фибоначчи на 5:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$\varphi_n \bmod 5$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2
$\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1} \bmod 5$	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	

Закономерность очевидна: $n\equiv 3 \pmod 4$.

Итак, $y=\frac{z+1}{5}=\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}$ и

$$x=\frac{t+3y-1}{2}=\frac{\varphi_n+3\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}-1}{2}=$$
$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_{n+3}-1}{5},$$

где $n\equiv 3 \pmod 4$. Обозначив $n = 4k - 1$, запишем эти формулы в виде $x=\frac{\varphi_{4k}+\varphi_{4k+2}-1}{5}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и

$y = \frac{\varphi_{4k-2} + \varphi_{4k} + 1}{5} = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$ (мы воспользовались тождеством $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} - (-1)^m = 5\varphi_m\varphi_{m+1}$ – см. упражнение 42). Теорема 11 доказана.

Упражнения

41. Докажите, что если x, y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$ и неравенству $x \geq y$, то $2x \geq 3y$.

42. Докажите

а) сравнение $\varphi_{n+3} + \varphi_{n+5} \equiv \varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} \pmod 5$;

б) тождества $\varphi_{2m} = \varphi_{m+1}^2 - \varphi_{m-1}^2$ и $\varphi_{2m+1} = \varphi_m^2 + \varphi_{m+1}^2$;

в) тождество $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} = 5\varphi_m\varphi_{m+1} + (-1)^m$.

43 (М905). Уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) имеет бесконечно много решений при $n = 2$; б) не имеет решений, если $n \neq 2$ и n – натуральное число. Докажите это.

Использование иррациональностей

Неравенства, неравенства, неравенства... Есть ощущение какого-то фокуса, когда все сходится, но причина удачи спрятана и не видна наивному зрителю. Сейчас мы докажем теорему 9 заново. Надеемся, этим мы поможем вам вполне уяснить доказательство этой теоремы.

Лемма 1. *Если $x^2 - dy^2 > 0$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то $x > 0$.*

Доказательство.

$$2x = x + y\sqrt{d} + \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} > 0 .$$

Есть и другой способ – «от противного». Предположим, что $x \leq 0$. Тогда обе части неравенства $y\sqrt{d} > -x$ можно возвести в квадрат:

$$dy^2 > x^2 ,$$

что противоречит неравенству $x^2 - dy^2 > 0$.

Лемма 2. *Если $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 1$, то $y > 0$.*

Доказательство. Пусть $y \leq 0$. Тогда

$$x - y\sqrt{d} \geq x + y\sqrt{d} > 1 .$$

Произведение чисел $x - y\sqrt{d}$ и $x + y\sqrt{d}$, каждое из которых больше 1, не может равняться 1.

Лемма 3. *Если $a^2 - db^2 = x^2 - dy^2$ и $x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, причем числа a, b, x и y неотрицательные, то $x < a$ и $y < b$.*

Доказательство.

$$a - b\sqrt{d} = \frac{a^2 - db^2}{a + b\sqrt{d}} < \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} = x - y\sqrt{d} .$$

Сложив неравенства

$$-x + y\sqrt{d} < -a + b\sqrt{d}$$

и

$$x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d} ,$$

получаем $2y\sqrt{d} < 2b\sqrt{d}$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 4. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $1 < x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, то $x^2 - dy^2 \neq 1$.*

Доказательство. Предположим противное: $x^2 - dy^2 = 1$. Тогда в силу лемм 1 и 2 числа x и y положительны. В силу леммы 3 имеем $x < a$. Получили противоречие.

Следующая теорема – это другая формулировка теоремы 9.

Теорема 12. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа, $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то для некоторого целого числа n верно равенство $x + y\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n$.*

Доказательство. Обозначим $q = a + b\sqrt{d}$. Поскольку числа a и b натуральные, то $q > 1$. Рассмотрим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$1 < q < q^2 < q^3 < q^4 < q^5 < \ldots$$

Она стремится к бесконечности. А убывающая геометрическая прогрессия

$$1 > \frac{1}{q} > \frac{1}{q^2} > \frac{1}{q^3} > \frac{1}{q^4} > \frac{1}{q^5} > \ldots$$

стремится к нулю. Поэтому существует такое целое n, что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \leq q^n .$$

Рассмотрим число

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right) : q^{n-1} .$$

Очевидно, $1 < E \leq q$. Поскольку

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{\left(a - b\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2} = a - b\sqrt{d} ,$$

то

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^{n-1} .$$

Воспользовавшись формулой

$$\left(r + s\sqrt{d}\right)\left(u + v\sqrt{d}\right) = (ru + dsv) + (rv + su)\sqrt{d} ,$$

мы заключаем, что число E представимо в виде $E = z + t\sqrt{d}$, где z, t – целые числа. Переходя к сопряженным числам, получаем

$$z - t\sqrt{d} = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)^{n-1} .$$

Следовательно,

$$z^2 - dt^2 = \left(z + t\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^{n-1}\left(a + b\sqrt{d}\right)^{n-1} = \left(x^2 - dy^2\right)\left(a^2 - db^2\right)^{n-1} = 1 .$$

Итак, числа z и t целые, $1 < z + t\sqrt{d} \le a + b\sqrt{d}$ и $z^2 - dt^2 = 1$. В силу леммы 4 это возможно лишь в случае равенства $z + t\sqrt{d} = a + b\sqrt{d}$, т.е. в случае

$$x + y\sqrt{d} = q^n,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 44. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $x^2 - dy^2 = 1$, то для некоторого целого числа n имеем $x + y\sqrt{d} = \pm\left(a + b\sqrt{d}\right)^n$. Докажите это.

Уравнение $x^2 - dy^2 = c$

Доказательство теоремы 12 могло показаться довольно длинным. Не вполне ясно, что проще: жонглировать неравенствами или иррациональностями. Оказывается, однако, что использованное при доказательстве теоремы 12 рассуждение позволяет выяснить, как устроены решения в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Напомним обозначения. Как и прежде, d – натуральное число, не являющееся квадратом; a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$; $q = a + b\sqrt{d}$; наконец, c – некоторое целое число, $c \ne 0$.

Пусть x и y – целые числа, $x^2 - dy^2 = c$ и $x + y\sqrt{d} > 0$. Рассмотрим числа вида q^n, где n пробегает множество всех целых чисел. Поскольку $\lim\limits_{n\to-\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, то существует такое целое число n, что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \le q^n.$$

Рассмотрим число

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right) : q^{n-1}.$$

Легко понять, что E представимо в виде

$$E = z + t\sqrt{d},$$

где z и t – целые числа. При этом

$$z^2 - dt^2 = c \qquad (*)$$

и

$$1 < z + t\sqrt{d} \le q. \qquad (**)$$

Теорема 13. *Рассмотрим всевозможные пары целых чисел $(z;\ t)$, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $(**)$. Верны следующие утверждения.*

1) Если множество M таких пар пусто, то уравнение $x^2 - dy^2 = c$ не имеет решений в целых числах x и y.

2) Множество M конечно.

3) Все целочисленные решения уравнения $x^2 - dy^2 = c$ можно получить из формул $x + y\sqrt{d} = \pm\left(z + t\sqrt{d}\right)q^n$, где $(z; t) \in M$, а n – целое число.

Доказательство. Первое и третье утверждения очевидны. Докажем второе. Пусть $(z; t) \in M$. Тогда

$$z - t\sqrt{d} = \frac{c}{z + t\sqrt{d}},$$

так что

$$\left|z - t\sqrt{d}\right| < |c|$$

и, следовательно,

$$|z| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) + \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2},$$

$$|t| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) - \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2\sqrt{d}}.$$

Теорема 13 доказана.

Упражнения

45. Уравнение $x^2 - 11y^2 = 17$ не имеет решений в целых числа. Докажите это.

46. Найдите все наборы а) 11; б) 23 последовательных чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа.

47. Найдите все такие натуральные числа x, что число, получаемое зачеркиванием последней цифры числа x^2, тоже является квадратом натурального числа. (А.Балахонкин и Ф.Кац, девятиклассники школы 131, Казань).

48. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 - 17y^2 = -16$; б) $x^2 - \left(n^2 + 1\right)y = -1$, где n – натуральное число.

49. Если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах x и y, то выбрав из таких решений то, где x – наименьшее возможное, получим а) $q = \left(x + y\sqrt{d}\right)^2$; б) $|M| = 1$. Докажите это.

50. При $a \ge 2$ уравнение $x^2 - \left(a^2 + 1\right)y^2 = -a^2$ имеет не менее трех серий решений, т.е. множество M для него состоит не менее чем из трех элементов. Докажите это.

51. Пусть p – простое число, $p \equiv 1 \pmod 4$, a – наибольшее (существующее в силу теоремы 10) натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - pb^2 = 1$. Докажите, что а) a нечетно; б) для некоторых натуральных чисел u и v верны равенства $a \pm 1 = 2u^2$, $a \pm 1 = 2pv^2$ и $b = 2uv$; в) $u^2 - pv^2 = -1$.

52*. Решите в натуральных числах уравнение

а) $3^s = 2^r + 1$; б) $x^2 + 2^y = 3^z$.

53. Решите в целых числах уравнение

а) $x^2 + 8xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;

б) $3u^2 + 11uv + 9v^2 + u + v = 0$.

(Продолжение следует)

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

Московский детский клуб «Компьютер»
math.child.ru


Тишков 2002

Зачем они приходят в этот мир?..

С.КРОТОВ

Возможность творческого открытия... Это дано всем. Каким-то шифром в человека заложен мощнейший аппарат – не приспосабливания, не мимикрии, а постижения, разгадывания мира, обустраивания его через собственные постоянные открытия. Если это устремление обжечь, осечь – раз, другой, третий, – оно уходит, забивается куда-то, в пятку, в мизинец ноги, и вы никогда человека уже не растормошите, ничему его не научите. Никогда человеком – в том смысле, в каком это заложено, – он уже не станет.

Как это ни парадоксально, ребенок – едва ли не единственное подлинно творческое существо. В том самом своем первородном состоянии, в котором он явился миру и открыл глаза, уши... Он все познает, все изучает, ничто его не пугает, не останавливают никакие правила, заборы, пределы. В рисунке ребенка, одном из первых его художественных опытов, уже просматриваются какие-то неожиданные сочетания, безбоязненность, смелость. Проявляется то, что в ребенке уже есть, – бесконечная палитра возможностей.

Именно поэтому человека в детстве надо как можно дольше оставлять наедине с собой, с природой, со своими органами чувств, которые не просто так ему даны. Они же за всю эволюцию как-то отрабатывались, отбирались, отлаживались. И образование, как мне кажется, призвано по возможности максимально продолжить это каждодневное «открывание», живущее в ребенке самовидение, самоудивление, сохранить некое внутреннее подвижное увеличительное стекло. Иначе дальше включается система образования, построенная на ограничительности и запретительности (я имею в виду, конечно, не поведенческие вопросы), возникают «нельзя», «это надо так» и прочее... Начинается эра приборов, устройств, кем-то уже сконструированных для того, чтобы он, взглянув сквозь стеклышко микроскопа, вдруг увидел, что у букашки, допустим, шесть ножек. Но куда более плодотворно было бы для него, будущего, чтобы каким-то чудом он вдруг набрался наглости и сам захотел изыскать способ обнаружить те же шесть ножек, но собственным способом!

Если мы говорим о человеческой личности не абстрактной, а живой, детской, не зачахнувшей, творческой, то мне представляется, что каким-то хитрым, тонким образом с самых исходных пор человека надо увлечь, раззадорить, может быть, иногда охладить или, напротив, поднять температуру, но создать условия, при которых формирование этого «чего-то» происходило бы в его душе наиболее оптимально. Жизнь короткая, и чем благоприятней будут эти условия, тем больше человеку откроется. Человек научается только сам. И в этом, мне кажется, корень всего. Только тогда, когда он сам почувствует, сделает, добьется, поймет что-то, он может сказать: «Да, я научился». И это не то же самое, что удачно повторить, скопировать. Это должно прорасти, проклюнуться, стать своим. А это зависит только от себя самого. От учителя – лишь в той степени, в какой он этому поможет, вовремя подтолкнет, вызовет ту сидящую внутри возможность. Он должен выступить в роли дирижера-импровизатора, виртуозно прикасающегося к регистрам детской души...

Хорошо известно, что обучать можно только тех, кто к этому имеет склонность. Но парадокс в том, что тот, кто к знаниям предрасположен, все равно к ним так или иначе, рано или поздно придет. Необходимо лишь максимально благоприятствовать общей ситуации, в которой ребенку открывается мир. Направлять, но, по возможности, невидимо. Присутствовать, но не явно, давая действовать в основном самому. Ребенок способен пройти лабиринт познания уже потому, что в нем на генетическом уровне есть устройства, для этого предназначенные.

Мы делаем детей заложниками, если указываем им только одну дорогу, заведомо обрекая на то, что они дойдут до тех вершин, которые уже открыты. Не с того мы начинаем учить. Например, основные понятия физики. Ведь это прежде всего – время, пространство, свет... Надо не бояться прививать ощущения смысла во всем. Людей же, обучая, как правило, максимально отдаляют от того, что это такое, превращают познание в некое упражнение на запоминание. Все начинается с формализации, сухих определений, отсекая с порога саму возможность блуждания мысли, ее круги, зигзаги... Все направлено на то, чтобы создать некий желоб, по которому потом потечет мысль.

Но это ли главное? А где размышления, рассуждения, вопросы? Солнце взошло. А что если когда-то не взошло (как, например, полярной зимой)?! Где эти всякого рода фантазии, пусть даже дурные, но подкрепляемые реальными парадоксами, противоречиями? По какому такому праву мы, порой не задумываясь, загоняем безбрежный простор детских фантазий в

Иллюстрация Л.Тишкова

прокрустово ложе наших представлений о том, как их надо учить?

...Как удивителен слегка ранящий, проникающий в глаза, сквозь глаза едва ощутимый поток видимого тепла... Это свет... Он удивительным образом несет уверенность, спокойствие, защиту... Да, он может вести, за него можно держаться. Он никогда не даст нам потеряться...

...Или, мы то и дело прибегаем к необходимости упоминать время. Мы постоянно ощущаем себя в плену у времени, оно незримо обволакивает нас. А зачем нам время? Оно – что? Где-то рядом, само по себе, или это мы его выдумываем всякий раз, когда набрасываем на себя его невидимое покрывало? А вот если бы человек очутился вдруг один на один с природой, возникла бы у него потребность-необходимость упоминать, ощущать, созерцать время? Цветы раскрываются, а потом закрываются, гусеница со свойственным только ей ритмом вползает-превращается в прелестную бабочку, сперматозоид в своем броуновско-эйнштейновском блуждании жадно ищет и наконец находит яйцеклетку, исчезает в ней, вместе с ней, а дальше все опять и опять возобновляется... Этот дурацкий круговорот, а скорее всего бешеная спираль, которая лишь в малом (локальном, как говорят физики) напоминает бег по кругу (а может быть, на месте?), это и есть... время. По-видимому, это одна из фундаментальных категорий для обозначения соразмерности, сравнительности, сопоставимости, соучастия. Оно нам нужно как логически-понятийный атрибут, выражающий взаимоочередность, структурно-изменчивое упорядочение, строй... С точки зрения природоосмысления-натурфилософии, время дуально (парно) энергии. Поэтому если энергия, то и время, если время, то и энергия (поток, переход, превращение). А может быть, сначала энергия, а потом (а что значит «потом» – да конечно же, вместе, вкупе) время? Время обнаруживается-проявляется при перетекании-поглощении энергии. Если энергия не потребляется, то и время не течет – наступает тепловая (энергетическая) пауза, и если навсегда, то это смерть? Жизнь – это потребление, превращение, преобразование энергии, а значит, сама жизнь – это и есть время.

Больше всего нас трогают переживания. Они постоянно влекут нас, провоцируя впасть в перманентный катарсис. Переживания-фантомы вообще могут улетать от действительности и жить сами по себе, создавая виртуальный мир наших чувствований. Но только через нереальный мир наших реальных ощущений мы идем по жизни. Мы все время движимы желаниями вторгнуться в ранее неизведанное и неперечувствованное, мы полны предчувствий всевозможных ранее не познанных переживаний, мы осваиваем пространство.

По-видимому, все это и создает в нас ощущение своей самоценности по сравнению с безжизненным камнем. Возбуждать желание мыслить – вот где суть, назначение, основа всякого начального образования.

Как добиться того, чтобы дети не чувствовали себя скованными, чтобы мозги формировались, оставаясь все время открытыми для раздумий, каких-то мистификаций, воображения? Лекарством, охранительным средством, противоядием здесь может служить игровая форма. Она благодаря своим непредвиденным поворотам сохранит, максимально отодвинет момент закостенения, оградит от выработки в себе приверженности к однонаправленности в познании.

Левое полушарие мозга, отвечающее за рациональное в человеке, предполагает постепенное овладение знанием, с более или менее ясным представлением, куда ты движешься. Реакция же от деятельности правого, связанного с эмоциями, образным восприятием, интуицией, – мгновенная. В массе постоянно накапливаемых знаний вдруг внезапно возникает мгновенный проблеск, озарение, непредвиденным заранее образом реорганизующее все то, что терпеливо собиралось и бережно вынашивалось. Именно этот гениальный механизм, заложенный природой, и отвечает за научение. Благодаря ему существует свойственная только людям уникальная возможность двигаться по драматически захватывающему пути познания, полному счастья и разочарований, взлетов и падений. Все здесь непредсказуемо.

Когда-то давно на Женевском озере неведомым образом был случайно поврежден проходивший по дну водопровод. Со дна озера стала бить огромная струя. Потом водопровод починили, но нашлись умные люди, которые специально для потомков (в назидание) оставили посреди озера этот удивительный, грандиозный фонтан высотой около 30 метров. (Потом его стали копировать в других городах и странах.) На ветру этот фонтан принимает форму гигантского уединенного паруса – огромной водяной простыни из восходящих водяных струй, создавая ощущение неукротимой стихии. Зрелище очень красивое и захватывающее. Но самое удивительное, что, когда светит яркое солнце, на берегу озера всегда есть место, откуда можно видеть в фонтане настоящую радугу. И по мере того как солнце движется по небосклону, то самое замечательное место на берегу, оставаясь на одной прямой с парусом и солнцем, также меняет положение – «движется».

Во всей этой физике (достаточно плотная огромного объема водяная пыль, яркий свет...), позволяющей при желании стать свидетелем исключительного атмосферного явления (с которым, кстати заметить, древние связывали особое расположение богов), будто бы запечатлена многовековая история – исследования, многочисленные суеверия, попытки разгадать тайну происхождения радуги И в то же время природная тайна – стихия – становится постижимой, появляется ощущение ее подвластности человеку... Это ведь заманчивее и увлекательнее всего, чего угодно, любого шоу, аттракциона! Вот она, если хотите, игра с самой природой. А ведь в обычной жизни не так-то просто наблюдать радугу. На Женевском же озере это чудо возобновляется каждый день. И вообще, там легко увидеть даже не одну, а две радуги, причем одна обычная, а другая – как бы первая, вывернутая наизнанку. Такие впечатления сильнее всего сближают с миром, лишний раз подтверждают, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (о чем иногда забывают в школе).

Сегодня многие сделали ставку на компьютер и на компьютерные игры. Но компьютерные игры – это же головоломки, забава (очень даже недурная). Они причисляются к игре только потому, что заранее неизвестно, сколько и зачем будет потрачено времени. Это нечто неживое, холодное, абсолютно алгоритмизированное, где всему есть разгадка. А настоящая игра – это интеллектуальная задача с неизвестным решением, ни одна из участвующих сторон до самого конца не знает, кто победит. Шансы игроков, пока идет игра, равны.

Компьютер, на самом деле, еще не состоялся. Это устройство на сегодняшний день вне поля истинного творчества. Изображение, которое выдает компьютер, это не картина. Это не живопись, не произведение искусства. Он лишен тайны, откровения. Его можно разложить до последней ячейки. Там слишком мало места для непредсказуемого, для чуда процесса познания. Компьютер может выдать вам только то, что вы в него заложили. Проблема лишь в увеличении плотности упаковки.

Он феноменально полезен, может быть, даже незаменим, когда вы уже кем-то стали, когда вы уже знаете, что я – это я, когда ваше «я» уже не так просто сломать. Тогда вы можете смело ступать на любую территорию этого чрезвычайно емкого хранилища, вмещающего бесконечное число вещей. Если же вы не готовы, общение с компьютером способно подавить, обернуться наваждением, превратиться в навязчивую идею.

Однажды мне в руки попала книга. Она называлась «Искусство и физика. Параллельное видение времени, пространства и света». Написал ее американец Леонард Шлэн, который, как выяснилось потом, когда я с ним списался, человек двух образований – хирург и архитектор. То есть, с одной стороны, естествоиспытатель – технарь, рукодел, а с другой стороны – человек, для которого важна художественная образность. Одна из идей, которую он проповедовал в хирургии, состояла в том, что удачу операции определяет красота шва. Она, по его убеждению, гарантирует, что вторжение в природную тайну и последующее заживление пройдут бесследно. Мне кажется, что этот человек действительно прочувствовал идею единства науки и искусства.

Со своей маленькой дочерью Шлэн однажды оказался в ньюйоркском художественном музее «Метрополитэн». При обсуждении увиденного в музее на некоторые из вопросов дочери он не смог дать быстрых и убедительных ответов. Детски наивному глазу ребенка кое-что из увиденного показалось не соответствующим действительности. Да и вообще было непонятно, как такие вещи могут нравиться, а если нет, то зачем они… и что такое тогда вообще – искусство? В результате бесконечных размышлений и появилась книга.

В ней автор показывает, что всему тому феноменальному, что вообще происходило в науке, и в частности научным революциям XX века – открытию квантовой механики, атомной физики, теории относительности, – всегда предшествовали некие творческие прозрения в искусстве. Параллель эта, по мнению автора, идет еще от древних греков, от Аристотеля к Декарту, Ньютону и доходит до сегодняшнего времени.

Он прослеживает эры, эпохи, стадии, эволюции и откровения в развитии искусства и вслед за этим – эпохи естествознания, вехи в научном осознании мира, в развитии структуры научного мышления. Это позволило ему вывести совершенно четкую закономерность: всем научным открытиям как правило предшествовало некое чувственное озарение, художественное открытие, овладение новой системой художественных образов. Изменяющийся взгляд на мироустройство каждый раз вырастал из господствовавшего в искусстве стиля, главным образом живописного языка, из философского, духовного воззрения на окружающий мир, его чувственного восприятия, воплощенного во фресках, живописных полотнах, других пластических формах.

Вероятно, и учить ребенка нужно, учитывая это глубинное «предшествование», первичность искусства. Искусство, конечно же, несет основную функцию соучастия в жизни человека. Но в школе если и учат искусствам, то в изоляции от остального знания. Законы природы – это само по себе, а все, что касается эмоций, – само по себе. В школе начинают с того, что учат читать, писать, складывать, а вот видеть, слышать, переживать – едва ли… Общая идея, заложенная в образовании, апеллирует, безусловно, к примату естественно-научного знания, и поэтому все должно быть логично, упорядочено, строго. Лишь в детском саду еще могло быть место «баловству», чудачествам, всякого рода глупостям. Но уже в начальной школе баланс умственного и эмоционального непоправимо нарушается в пользу первого. А ведь без чувственной основы, не взращенный и не закрепленный эмоционально, весь получаемый жизненный опыт пуст. Школа занимается подготовкой будущих ремесленников. Считается, что если даже медведя заставить повторить что-то 17 раз, то и он запомнит. Когда образование превращается в дрессуру, опирается лишь на тренированность – оно теряет смысл.

Все научные революции последних столетий вырастали на отрицании линейной однонаправленности, примата логического в познании, на утверждении того, что свойственно образному мировосприятию. Все было устремлено к тому, чтобы восстановить нарушенный баланс, уравновесить, привести логическое (рациональное) и интуитивное (творческое) к целостности, которая, с одной стороны, как бы оставляет тебя на земле, все время дает понять, что ты еще здесь, но в то же время уводит в эмпиреи чувствования, предлагает все время какие-то расширяющиеся, бесконечные горизонты, приближающие к идеалу, абсолюту.

В сущности, и школа должна прежде всего помочь ребенку ощутить в себе внутренние силы, привнося в любую деятельность духовную составляющую, живое чувство.

Возраст человека – это его шагреневая кожа. Основная несущая нас гибкая опора-конструкция – позвоночник, и та с возрастом костенеет. Но чем дольше будут оставаться нетронутыми тонкие душевные ткани ребенка, извечный нежный хорд, тем теснее будет его связь со всей Вселенной…

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2002 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1826» или «Ф1833». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1826, М1829 и М1830 предлагались на LXV Московской математической олимпиаде.

Задачи Ф1833 – Ф1837 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1826—М1830, Ф1833—Ф1837

М1826. Про положительные числа a, b, c известно, что $1/a + 1/b + 1/c \geq a + b + c$. Докажите, что $a + b + c \geq 3abc$.

С.Злобин

М1827. Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB. Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам (рис.1).

В.Дубов

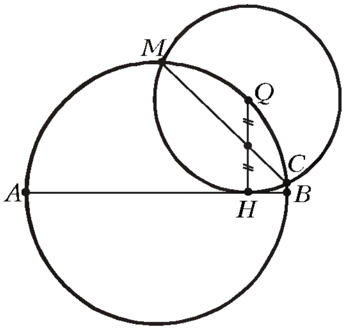


Рис.1

М1828. А, Б, В, Г и Д собирают почтовые марки. У А – более $3/4$ марок Б, у Б – более $3/4$ марок В, у В – более $3/4$ марок Г, у Г – более $3/4$ марок Д, у Д – более $3/4$ марок А. Докажите, что есть марка, которая имеется у каждого филателиста.

В.Произволов

М1829. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в черный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек были подобны друг другу (возможно, с разными коэффициентами подобия)?

Г.Гальперин

М1830. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих чисел.

А.Шаповалов

Ф1833. Маленькую шайбу запустили по шероховатой горизонтальной поверхности со скоростью $v_0 = 5$ м/с. График зависимости скорости шайбы v от пройденного ею пути s изображен на рисунке 2. Какой путь пройдет шайба до полной остановки, если ее запустить из той же точки в том же направлении со скоростью $v_1 = 4$ м/с?

О.Шведов

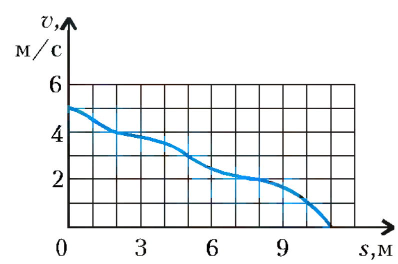


Рис.2

Ф1834. В системе, изображенной на рисунке 3, прикрепленные к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстояниях $L/2$ от стенок, к которым прикреплены концы пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны L. Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найдите максимальную скорость, которую будут

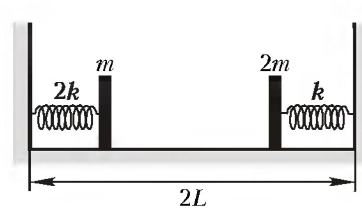


Рис.3

иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар является центральным. Жесткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.

А.Якута

Ф1835. На рисунке 4 приведен график зависимости давления насыщенного пара некоторого вещества от температуры. Определенное количество этого вещества находится в закрытом сосуде постоянного объема в равновесном состоянии, соответствующем точке A на рисунке. До какой температуры следует охладить эту систему, чтобы половина имеющегося в сосуде вещества сконденсировалась? Объемом сконденсировавшегося вещества можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда.

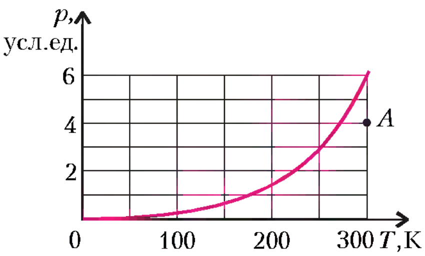


Рис.4

С.Варламов

Ф1836. При измерении зависимости величины напряженности электрического поля от времени в некоторой точке пространства был получен график, изображенный на рисунке 5. Электрическое поле создается двумя одинаковыми точечными зарядами, один из которых неподвижен и находится на расстоянии d от точки наблюдения, а другой движется с постоянной скоростью. Найдите величины зарядов, минимальное расстояние от движущегося заряда до точки наблюдения и скорость движущегося заряда.

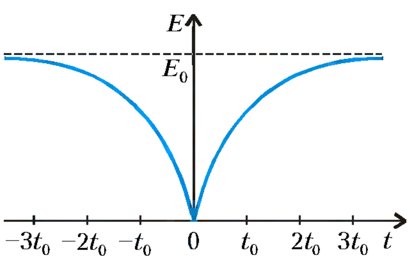


Рис.5

О.Шведов

Ф1837. Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом r и двух крайних цилиндров радиусами $R > r$. Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещенный в однородное постоянное магнитное поле B, линии индукции которого параллельны оси катушки (рис.6). К одному концу провода, лежащему на столе, подсоединяют одну клемму идеального вольтметра, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединенного со второй клеммой вольтметра, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью v в направлении, перпендикулярном оси катушки. Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найдите показания вольтметра.

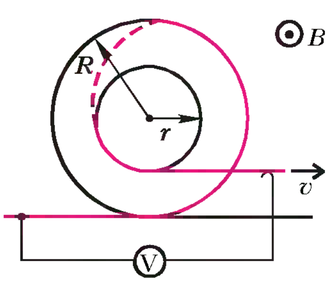


Рис.6

А.Якута

Решения задач М1801–М1810, Ф1818–Ф1822

М1801. *Натуральное число n равно сумме некоторых трех различных натуральных делителей числа n − 1. Найдите все такие числа.*

Ответ: 13 и 31.

Пусть $n = x + y + z$, где x, y, z – натуральные делители числа $n-1$, причем $x > y > z$.

Если x не превышает трети числа $n-1$, то два других делителя менее трети числа $n-1$ каждый, т.е. $x + y + z$ меньше $n-1$ и тем более меньше n. Поэтому

$$x = \frac{n-1}{2}, \; n - x = \frac{n+1}{2} = y + z .$$

Рассуждая аналогично, получим, что $y = \frac{n-1}{3}$. Тогда $z = \frac{n+5}{6} > \frac{n-1}{6}$. Таким образом, возникают две возможности: $z = \frac{n-1}{4}$ и $z = \frac{n-1}{5}$. Решая уравнения

$$n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{4}$$

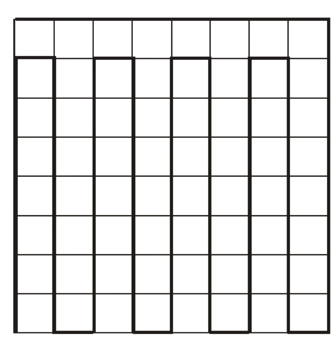
и

$$n = \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{3} + \frac{n-1}{5},$$

получим два значения: $n = 13$ и $n = 31$.

С.Токарев

М1802. *План секретного объекта представляет собой квадрат размером 8×8, который разбит коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещенных коридорах свет выключается, а в неосвещенных – включается). Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать переключателями сколько угодно раз. а) Может ли сторож перебраться в верхний левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах? б) Найдите все вершины квадратиков, в которые сторож сможет так перебраться.*



а) Сторож может пройти по пути, показанному на рисунке, щелкнув по одному разу по всем попавшимся на пути выключателям. При этом он побывает в каждом узле сетки ровно один раз и в каждом коридоре один раз включит свет и один раз – выключит. По окончании пути весь объект будет неосвещен.

б) Если раскрасить вершины в шахматном порядке, то сторож может перебраться в вершины того же цвета, что и левый нижний угол, и только в эти вершины. Почему?

Да потому что сторож может «пройти по диагонали», т.е. перебраться в единичном квадрате $ABCD$ из A в противоположную вершину C. Для этого достаточно пройти по пути $ABCDABC$, щелкая всеми встречающимися выключателями, кроме D. Умея «проходить по диагонали», сторож сможет пройти в любую вершину того же цвета, что и левый нижний угол.

И сторож не может перебраться в вершины другого цвета. Чтобы доказать это, докажем, что если сторожу удалось погасить весь свет, то он сделал четное число переходов по единичным коридорам. (Этого достаточно: так как каждый переход меняет цвет вершины, то после четного числа переходов цвет вернется к первоначальному.)

Будем считать, что каждый переключатель может находиться в положениях ВВЕРХ или ВНИЗ и что вначале все переключатели были ВНИЗ. Заметим, что на концах освещенного коридора положения переключателей различны. Сторож может выполнять элементарные действия двух видов: щелкать выключателем и переходить от выключателя к соседнему выключателю по освещенному коридору. После любого из таких действий он оказывается у противоположно направленного переключателя.

В полностью неосвещенном объекте все выключатели будут одинаково ориентированы: все ВВЕРХ или все ВНИЗ. Разберем оба случая. Если в конце все выключатели ВНИЗ, то сторож в сумме совершил четное число действий, так как начал и закончил у выключателя ВНИЗ. Поскольку он щелкнул каждым выключателем четное число раз, то общее число щелчков тоже четно. Значит, четно и число переходов.

Если же в конце все выключатели ВВЕРХ, то сторож сделал в сумме нечетное число действий. Но так как всего выключателей 81 (нечетное число!), причем каждым сторож щелкнул нечетное число раз, то общее число щелчков тоже нечетно. Значит, число переходов и в этом случае четно.

А.Шаповалов

М1803. *В квадрате $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45°$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна суммарной площади треугольников QCP, QAD и PAB.*

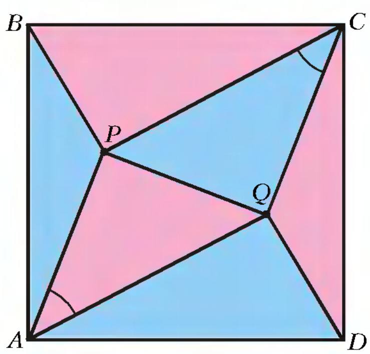


Рис.1

Симметрично отразим ΔAPB относительно прямой AP, а ΔAQD – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Значит, суммарная площадь треугольников QCP, QAD и PAB равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQM.

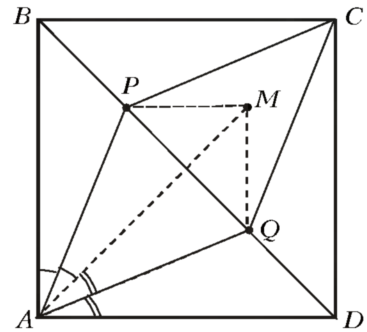


Рис.2

Симметрично отразим ΔCPB относительно прямой CP, а ΔCQD – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N. Значит, суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQN.

Остается заметить, что площади треугольников PQM и PQN равны, поскольку сами треугольники равны.

В.Произволов

М1804. *Докажите, что*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

для любых положительных чисел a, b и c.

Так как выражение в левой части однородно относительно a, b и c (т.е. $f(a,b,c) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$), то мы можем считать, что $abc = 1$.

Из равенства $abc = 1$ следует, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8abc}{a^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}.$$

Пусть

$$1+\frac{8}{a^3} = x,\quad 1+\frac{8}{b^3} = y,\quad 1+\frac{8}{c^3} = z,$$

тогда нужно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}} \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz} \ge \sqrt{xyz} \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{x^2yz}+2\sqrt{xy^2z}+2\sqrt{xyz^2} \ge xyz \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \ge xyz. \quad (1)$$

Теперь, применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, находим

$$x = 1+\underbrace{\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^3}}_{8\text{ раз}} \ge 9\sqrt[9]{1\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^8} = \frac{9}{a^{8/3}},$$

поэтому $\sqrt{x} \ge \frac{3}{a^{4/3}}$. Аналогично,

$$\sqrt{y} \ge \frac{3}{b^{4/3}},\quad \sqrt{z} \ge \frac{3}{c^{4/3}},$$

следовательно,

$$\sqrt{xyz} \ge \frac{27}{(abc)^{4/3}} = 27$$

и

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}} \ge 3\sqrt[3]{27} = 9.$$

Поэтому для доказательства неравенства (1) достаточно показать, что

$$xy + xz + yz + 2 \cdot 27 \cdot 9 \geq xyz\ . \qquad (2)$$

Положим $\frac{8}{a^3} = A$, $\frac{8}{b^3} = B$, $\frac{8}{c^3} = C$, тогда (2) примет вид

$$(1+A)(1+B)+(1+A)(1+C)+$$
$$+\ (1+B)(1+C)+486 \geq (1+A)(1+B)(1+C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A+B+C+488 \geq ABC\ .$$

Но

$$A \cdot B \cdot C = \frac{8^3}{(abc)^3} = 8^3,$$

отсюда

$$A+B+C \geq 3\sqrt[3]{ABC} = 24\ ,$$

и, значит,

$$A+B+C+488 \geq 512 = 8^3 = A \cdot B \cdot C\ .$$

Утверждение доказано.

М.Гарбер

М1805*. *В математической олимпиаде приняли участие двадцать один мальчик и двадцать одна девочка. Известно, что*

- *каждый из них решил не более шести задач;*
- *для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.*

Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы три мальчика и три девочки.

Исключим из рассмотрения задачи, которые никто не решил. Обозначим через A множество задач, каждую из которых решили не более двух мальчиков, а через $\overline{A}$ – остальные задачи олимпиады, т.е. решенные не менее чем тремя мальчиками. Аналогично для девочек определим множества B и $\overline{B}$. Если бы некоторый мальчик решил задачи только из B, то не более 12 девочек решили бы общие с ним задачи (хотя бы по одной), что противоречит условиям задачи. Значит, каждый мальчик решил хотя бы одну задачу из $\overline{B}$ и, тем самым, не более пяти задач из B. Поэтому у каждого мальчика не более чем с 10 девочками общие задачи из B и, следовательно, не менее чем с 11 девочками общие задачи только из $\overline{B}$ (если у некоторой девочки общие с ним задачи как из B, так и из $\overline{B}$, то она в число этих 11 девочек не входит). Для всех мальчиков мы получили множество M из не менее $21 \cdot 11$ пар «мальчик–девочка» с общими задачами только из $\overline{B}$. Точно так же рассматривая девочек, получаем множество N из не менее $21 \cdot 11$ пар «девочка–мальчик» с общими задачами только из $\overline{A}$. Всего пар «мальчик–девочка» $21 \cdot 21$, следовательно, какая-то пара «мальчик–девочка» входит как в M, так и в N, т.е. у них есть общая решенная задача, входящая в множества $\overline{B}$ и $\overline{A}$. Это означает, что найденную задачу решили по крайней мере 3 девочки и по крайней мере 3 мальчика. Утверждение доказано.

С.Спиридонов

М1806. *Таблица чисел размером $n \times n$ такова, что любые n чисел, указанные по одному в каждой строке и в каждом столбце, дают всегда одинаковую сумму. В каждой строке таблицы определяется минимальное число, среди этих n чисел выделяется максимальное число M. В каждом столбце таблицы определяется максимальное число, среди них выделяется минимальное число m. Докажите, что $M = m$.*

Обозначим таблицу, оговоренную условием задачи, через A. Составим таблицу B, у которой все n строк будут одинаковыми и такими, какая первая строка у таблицы A. Затем, вычтя из таблицы A таблицу B, получим новую таблицу C, у которой в каждой строке будут стоять одинаковые числа (например, в первой – только нули), т.е. у таблицы C одинаковыми будут все столбцы. Таким образом, таблица A представлена как сумма двух специальных таблиц: $A = B + C$ (чуть подробнее об этом рассказано в решении задачи М1760 в «Кванте» №4 за 2001 г.).

К примеру,

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 3, & 3, & 3 \\ 6, & 6, & 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко сообразить, что M равно сумме минимального числа из таблицы B и максимального числа из таблицы C. Точно так же число m, в силу его определения, равно сумме максимального числа из таблицы C и минимального числа из таблицы B, т.е. $M = m$.

Сформулируем дополнительное утверждение. В каждой строке таблицы A выберем максимальное число, среди этих n чисел выберем минимальное число μ. Можно доказать (по той же схеме), что $M + \mu$ *равно сумме максимального и минимального чисел из таблицы A.*

В.Произволов

М1807. *При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон?*

Основой решения является следующее утверждение: нельзя разрезать плоскость на 5 областей, из которых любые две имели бы общую границу (не точечную). Для его доказательства достаточно заметить, что если 4 области попарно граничат, то одна из них лежит в «кольце», образованном тремя остальными, как на рисунке 1, и, следовательно, пятая область не может граничить со всеми четырьмя.

Пусть k – наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более трех его сторон. В силу выпуклости остальных $n-1$ многоугольников каждый из них граничит не более чем с одной стороной k-угольника. Следовательно, $k \leq n+$ $+2$, и, значит, есть единственная возможность: тре-

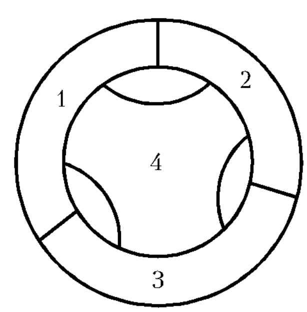


Рис.1

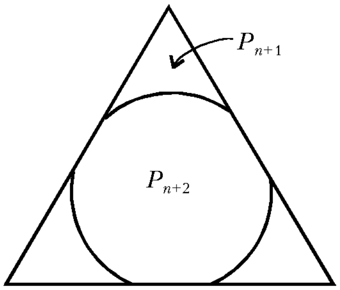


Рис.2

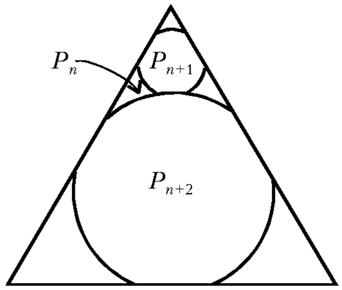


Рис.3

угольник разрезан на n многоугольников с числом сторон от 3 до $n + 2$.

Так как $(n + 2)$-угольник граничит с тремя сторонами исходного треугольника, $(n + 1)$-угольник может граничить только с двумя из них (рис.2). Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, n-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника (рис.3) и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Поэтому $(n - 1)$-угольник граничит либо со всеми многоугольниками, либо с какой-то стороной исходного треугольника.

Таким образом, при $n > 4$ существует 5 областей, из которых любые две имеют общую границу: это либо 5 многоугольников с наибольшим числом сторон, либо 4 многоугольника с наибольшим числом сторон и внешняя по отношению к исходному треугольнику область. Поскольку такие 5 областей существовать не могут, при $n > 4$ искомое разрезание невозможно. Пример разрезания с $n = 4$ приведен на рисунке 4. Аналогично строятся примеры для $n = 2$ или 3.

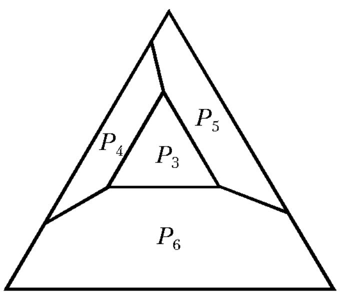


Рис.4

А.Заславский

М1808. *Решите в натуральных числах следующие уравнения:*

а) $x! + y! = z!!$;

б) $(x!)(y!) = z!!$

($z!!$ – произведение всех натуральных чисел, не превосходящих числа z и имеющих с ним одинаковую четность).

Всюду ниже $x \le y$.

а) Если число z нечетно, то $x = 1$ и $y = 2$ (при $y > 2$ числа $y!$ и $z!!$ делились бы на 3). Значит, либо $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, либо $z = 2m$. Очевидно, $(2m)!! = 2^m(m!)$.

Первый случай: $m \ge x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$1 + \frac{y!}{x!} = 2^m\left(\frac{m!}{x!}\right).$$

Очевидно, $\frac{y!}{x!}$ равно 1 либо $x + 1$ (число $(x+1)(x+2)\ldots$ было бы четно). В первом случае $m = x = 1$, что дает решение $(1, 1, 2)$. Во втором случае $m = x$ (при $m > x$ число $x + 1$ было бы делителем 1). Следовательно, $y = m + 1$, и

$$m + 2 = 2^m. \qquad (*)$$

Второй случай: $m < x$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$\frac{x!}{m!} + \frac{y!}{m!} = 2^m.$$

Имеем: $x = m + 1$, поскольку числа $m + 1$ и $m + 2$ не могут одновременно быть степенями двойки. Далее, $y = m + 1$ либо $y = m + 2$. Действительно, при $y \ge m + 3$ нечетное число $1 + (m+2)(m+3)\ldots$ было бы степенью 2.

Получили: либо $2(m+1) = 2^m$, т.е.

$$m + 1 = 2^{m-1}, \qquad (**)$$

либо $(m+1) + (m+1)(m+2) = 2^m$, т.е. $(m+1)(m+3) = 2^m$. В этом случае $m + 1 = 2^\alpha$, $m + 3 = 2^\beta$, следовательно, $2^\beta - 2^\alpha = 2$, $2^\alpha\left(2^{\beta-\alpha} - 1\right) = 2$, $\alpha = 1$, $m = 1$. Но

$$(m+1)(m+3) = 8 \ne 2 = 2^m.$$

Таким образом, уравнение задачи свелось к $(*)$ и $(**)$. Рассмотрим уравнение $2^t = t + 2$. Функция $f(t) = 2^t - t - a$ при любом a имеет не более двух корней, поскольку $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 - 1$ имеет единственный корень ($t = \log_2 \log_2 e$). При $a = 2$ один из корней отрицателен, поскольку $f(0) = -1$ и $f(t) \to +\infty$ при $t \to -\infty$. Положительный корень очевиден: $t = 2$.

Таким образом, $(*)$ дает $m = 2$, т.е. решение $(2, 3, 4)$.

Уравнение $(**)$ дает $m = 3$, т.е. решение $(4, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(4, 4, 6)$.

б) Если $x > 1$ либо $y > 1$, то z четно. Таким образом, либо $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, либо $z = 2m$ и $z!! = 2^m(m!)$.

Лемма. *Число $m!$ не делится на 2^m (m – натуральное число).*

(Доказательство леммы приведем ниже.)

Докажем теперь, что $y > m$. Пусть $x \le m$. Тогда $y! = 2^m \cdot \frac{m!}{x!}$. Отсюда вследствие леммы $y > m$.

Имеем: $x!\left((m+1)\ldots y\right) = 2^m$. В правой, а значит, и в левой части этого равенства нет отличных от 1 нечетных множителей. Следовательно, $y = m + 1$, а x равен 1 либо 2. В первом случае $m + 1 = 2^m$, во втором $m + 1 = 2^{m-1}$.

Уравнение $2^t = t + 1$ имеет ровно 2 корня: $t = 0$ и $t = 1$, а уравнение $2^{t-1} = t + 1$ – корень $t = 3$ и второй корень, меньший 1 (см. пункт *а*)). Случай $t = 1$ дает решение $(1, 2, 2)$, а случай $t = 3$ – решение $(2, 4, 6)$.

Ответ: $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 4, 6)$, $(4, 2, 6)$.

Доказательство леммы.

Пусть α – степень, в которой 2 входит в разложение числа $n!$ на простые множители. Среди чисел 1, 2, 3, … …, n имеется $\left[\frac{n}{2}\right]$ чисел, кратных 2, из них $\left[\frac{n}{4}\right]$ чисел, кратных 4, и т.д. Поэтому

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots$$

(очевидно, в этой сумме конечное число отличных от нуля слагаемых).

Используя очевидное неравенство $[t] \le t$ для любого вещественного числа t, получаем

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots <$$
$$< \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^k} + \ldots = n .$$

Лемма доказана.

В.Сендеров

М1809*. *Пользуясь одной линейкой, найдите центры а) двух пересекающихся окружностей; б) двух касающихся (внешним или внутренним образом) окружностей; в) двух концентрических окружностей.*

Воспользуемся известной теоремой: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и две секущие и если точки пересечения секущих с окружностью рассматриваются как вершины выпуклого четырехугольника, то точка пересечения диагоналей этого четырехугольника принадлежит прямой, проходящей через точки касания указанных касательных с окружностью, а две противоположные стороны четырехугольника или параллельны, или точка пересечения их продолжений лежит на той же прямой.

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии: планиметрия» (серия «Библиотечка «Квант», вып. 17; задача II.271).

Эта теорема позволяет выполнить следующее построение.

Построение 1. *Из точки вне окружности провести к окружности касательные.*

Проведем из точки A к окружности три произвольные секущие, которые пересекут окружность в точках B и C, D и E, F и G (рис.1). Прямые BE и DC пересекаются в точке K, а прямые DG и FE – в точке L. Прямая KL пересечет окружность в точках M и N. Прямые AM и AN – искомые касательные.

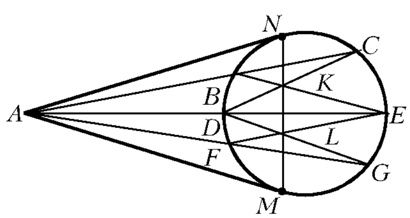


Рис.1

Устремляя угол между секущими к нулю, из теоремы получим следствие: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и секущая, то на прямой, проходящей через точки касания касательных с окружностью, пересекаются (если они не параллельны) две другие касательные к окружности, проведенные через точки пересечения окружности с секущей.

С помощью этого следствия нетрудно доказать еще одну теорему: пять указанных ниже прямых, если они не параллельны, пересекаются в одной точке: две касательные к окружности, проведенные через точки ее пересечения с диагональю описанного около окружности четырехугольника, продолжение второй диагонали четырехугольника и две прямые, каждая из которых проходит через две расположенные по одну сторону от второй диагонали точки касания окружности со сторонами четырехугольника.

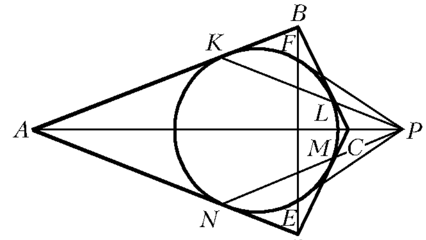


Рис.2

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, K, L, M, N – точки касания его сторон с окружностью, и пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P (рис.2).

Из точки P проведем к окружности касательные PE и PF (E и F – точки касания). Согласно указанному выше следствию, прямые AB и BC, AD и CD пересекаются на прямой EF. Но эти прямые пересекаются на диагонали BD. Следовательно, точки E и F лежат на диагонали BD.

Остается доказать, что продолжение диагонали AC проходит через точку P.

Пусть прямая KL пересекает прямую AC в точке P', а прямая NM пересекает AC в точке P''.

Из треугольника ABC, по теореме Менелая, получим

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = -1 .$$

Точно так же из треугольника ADC

$$\frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A} = -1 ,$$

откуда

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = \frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A} .$$

Учитывая равенство длин касательных, проведенных к окружности из одной точки, $\frac{CP'}{P'A} = \frac{CP''}{P''A}$, т.е. точки P' и P'' совпадают, или, что то же самое, прямая AC проходит через точку пересечения прямых KL и NM. Теорема обосновывает такое построение.

Построение 2. *Провести касательную к окружности через заданную на окружности точку.*

Пусть на окружности задана точка E (см. рис.2). Через эту точку проведем произвольную секущую (но заведомо не через центр окружности), которая пересечет окружность в точке F. Возьмем на прямой EF по разные стороны от окружности произвольные точки B и D и из них проведем к окружности касательные (построение 1). Пусть соответствующие точки пересечения касательных – A и C, а точки касания – K, L, M, N. Прямые KL, NM и AC пересекаются в точке P, а прямые PE и PF касаются окружности.

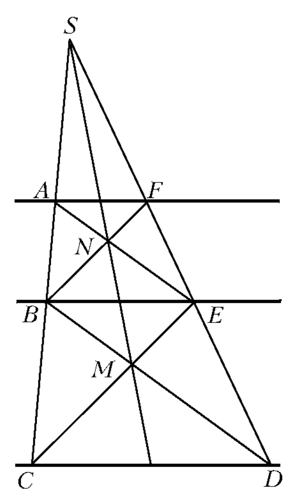


Рис.3

Понадобятся еще два вспомогательных построения, доказательства которых почти очевидны, а потому опускаются.

Построение 3. Через точку A провести прямую, параллель-

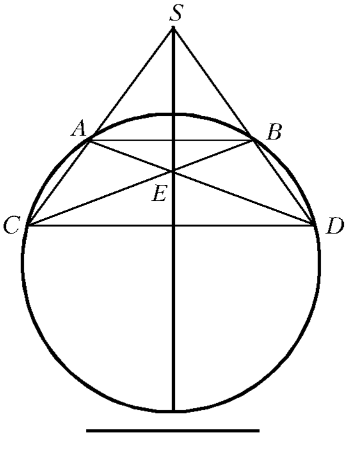


Рис.4

ную двум данным на плоскости параллельным прямым.

Через точку A проведем прямую, пересекающую параллельные прямые в точках B и C (рис.3). Взяв на прямой AB произвольную точку S, проведем через эту точку еще одну прямую, которая пересечет те же параллельные прямые в точках E и D. Пусть M – точка пересечения прямых BD и CE, N – точка пересечения прямых SM и AE, F – точка пересечения прямых BN и SD. Тогда AF – искомая прямая.

Построение 4. Найти диаметр окружности, перпендикулярный двум параллельным прямым, лежащим в плоскости окружности.

Возьмем на окружности точки A и C (рис.4) и построим хорды AB и CD, параллельные заданным прямым (построение 3). Для удобства построения точки A и C выбираются так, чтобы хорды AB и CD были заведомо не равны.

Если E – точка пересечения прямых AD и BC, S – точка пересечения прямых CA и DB, то искомый диаметр лежит на прямой SE.

Теперь решим задачу а).

Пусть окружности пересекаются в точках A и B (рис.5), причем сначала рассмотрим случай, когда отрезок AB не совпадает с диаметром одной из окружностей. В этих точках проведем к окружностям касательные (построение 2). Если C – точка пересечения касательных к одной окружности, а D – точка пересечения касательных к другой окружности, то прямая CD, в силу симметрии, проходит через центры окружностей.

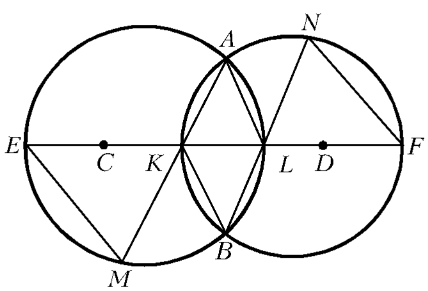


Рис.5

На рисунке 5 EL и KF – диаметры окружностей. Если построить другие диаметры этих окружностей, то задача будет решена.

Проведем прямые AK и BL до пересечения с окружностями в точках M и N, а затем проведем прямые EM и FN. $\angle LEM = \angle MAL$, как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Точно так же $\angle KFN = \angle KBN$. Но, учитывая симметрию, $\angle MAL = \angle KBN$, поэтому $\angle LEM = \angle KFN$, значит, прямые EM и FN параллельны.

Теперь, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные прямым EM и FN.

Если точки пересечения окружностей очень близки к концам одного диаметра меньшей окружности (или, возможно, совпадают с концами диаметра, но это не известно заранее), так что получить точку пересечения касательных к меньшей окружности не удастся, можно воспользоваться точками пересечения касательных к меньшей окружности с большей окружностью – если рассматривать эти точки как вершины трапеции (или прямоугольника), то точка пересечения диагоналей такой трапеции (прямоугольника) и точка пересечения касательных к большей окружности находятся на прямой, проходящей через центры окружностей.

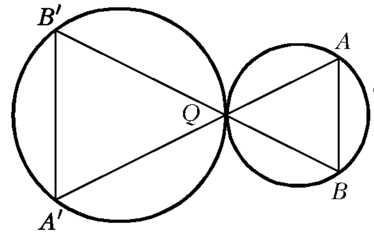


Рис.6

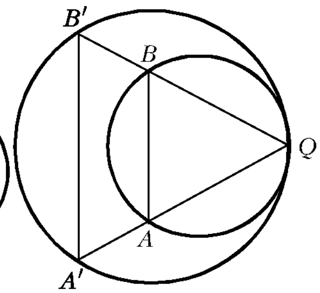


Рис.7

Если известно, что точки пересечения окружностей совпадают с концами диаметра меньшей окружности, или известно, что окружности равны, то построения значительно упрощаются (рассмотрите эти случаи).

б) Пусть окружности касаются в точке Q (рис.6 и 7). Проведем через эту точку две прямые, пересекающие окружности в точках A и B, A' и B' соответственно. Учитывая гомотетию с центром в точке Q, прямые AB и $A'B'$ параллельны, поэтому, пользуясь построением 4, найдем диаметры окружностей, перпендикулярные этим прямым.

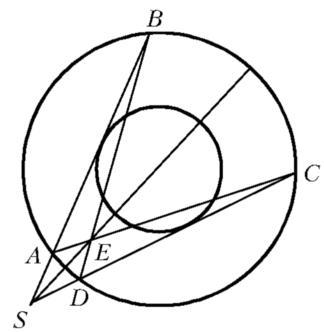


Рис.8

Проведя через точку Q другие прямые, найдем другие диаметры.

в) Взяв вне окружностей произвольную точку S, проведем касательные к меньшей окружности, которые пересекут большую окружность в точках A, B, C, D (рис.8).

Если E – точка пересечения прямых AC и BD, то прямая SE проходит через центр окружностей.

Так же найдем еще одну прямую, проходящую через центр.

В заключение стоит отметить, что если на чертеже нет других фигур, кроме одной окружности, то найти ее центр с помощью только линейки нельзя. Но если окружность задана вместе с центром, то с помощью одной линейки можно, как известно из геометрии, проводить всевозможные построения.

И.Вайнштейн

М1810*. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходится четное число ребер. Одна грань многогранника красная, остальные – синие. Периметр каждой синей грани равен целому числу. Докажите, что периметр красной грани равен целому числу.*

Доказательству этого факта предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Выпуклый многогранник, в каждой вершине* *которого сходится четное число ребер, можно правильно окрасить в черный и белый цвета. При этом окраска считается правильной, если каждые две грани, имеющие общее ребро, окрашены в разные цвета.* [1]

Докажем эту лемму. Многогранник представляет собой карту, где странами в исходный момент являются его грани. Будем ходить по границам и вершинам этой карты. При этом, пройдя границу и оказавшись в некоторой вершине, мы пойдем дальше по любой другой границе, исходящей из этой вершины. Будем идти до тех пор, пока не попадем в вершину, в которой мы уже были, например в вершину A. Участок пути между выходом из вершины A и возвращением в нее представляет собой замкнутый несамопересекающийся контур; снимем его с карты. Тогда получим на поверхности многогранника несколько иную карту. При этом кратность каждой вершины либо не изменится (если контур не проходит через нее), либо уменьшится на 2, т.е. по-прежнему останется четной. Поэтому во вновь получившейся карте мы снова можем выделить некоторый несамопересекающийся замкнутый контур, который мы опять снимем. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем всю карту (при этом процессе вершины многогранника постепенно перестают быть вершинами карты). Итак, исходная карта, все вершины которой имеют четную кратность, может быть получена последовательным наложением на поверхность многогранника контуров, каждый из которых разбивает ее на две части. При очередном наложении все страны в одной части сохраняют свои цвета, а в другой – цвет каждой страны меняется на противоположный.

Лемма 2. *Если грани выпуклого многогранника правильно окрашены в черный и белый цвета, то сумма периметров черных граней равна сумме периметров белых граней.*

Справедливость этого утверждения сразу следует из того, что каждое ребро многогранника принадлежит одновременно как черной, так и белой его граням.

Теперь обратим взоры на многогранник, оговоренный условием задачи, и обозначим его через M. Согласно лемме 1, многогранник M можно правильно перекрасить в черный и белый цвета (не забывая при этом первоначальные цвета его граней).

Пусть оказалось, что все черные грани до того были синими, тогда суммарный периметр черных граней равен целому числу K. Суммарный периметр белых граней тоже K (лемма 2). При этом белые грани, которые были синими, имеют целочисленный суммарный периметр. Значит, белая грань, которая была красной, имеет периметр, равный целому числу.

В.Произволов

Ф1818. *На плоскости нарисован большой квадрат АБВГ со стороной d. За какое минимальное время точка может проехать по пути АБВГА, если ее максимальное ускорение по величине не может превышать a?*

При прохождении любого угла скорость точки должна падать до нуля – иначе ускорение при повороте станет бесконечно большим. Минимальное время прохождения отрезка d при нулевой начальной и нулевой конечной скоростях получится в том случае, если половину пути точка ускоряется с максимально возможным ускорением a, а половину пути замедляется с тем же по величине ускорением. Это время τ найдем из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2=\frac{d}{2}.$$

Тогда полное время будет равно

$$T=4\tau=8\sqrt{\frac{d}{a}}.$$

Однако в задаче не было явно сказано, что скорости точки при входе в квадрат и при выходе из него (там поворачивать не нужно!) равны нулю. В этом случае время τ_1 можно найти из условия

$$\frac{1}{2}a\left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2=d,$$

и полное время движения точки будет равно

$$T_1=2\tau_1+2\tau=\left(4+2\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{d}{a}}<T.$$

З.Рафаилов

Ф1819. *Тело массой M = 10 кг подвешено в лифте при помощи трех одинаковых легких веревок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие – к полу. Веревки натянуты так, что в покое натяжение каждой из нижних составляет F_0 = 5 Н. Найдите силу натяжения верхней веревки при ускорении лифта, равном $a_1 = 1$ м/с^2 и направленном вверх. То же – при величине ускорения лифта $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения принять равным g = 9,8 м/с^2.*

Когда груз вместе с лифтом движется с направленным вверх ускорением a, то веревка сверху немного растягивается (ее натяжение F должно увеличиться), а нижние веревки на столько же укорачиваются – если еще остаются натянутыми. Обозначим жесткость одной веревки k и растяжение верхней веревки x. В состоянии покоя

$$F-Mg-2F_0=0.$$

При движении вверх с ускорением a

$$(F+kx)-Mg-(2F_0-2kx)=Ma.$$

Отсюда

$$kx=\frac{Ma}{3}.$$

Для $a_1=1$ м/с^2 натяжение верхней веревки равно

$$F_1=F+kx=Mg+2F_0+\frac{Ma_1}{3}=$$
$$=98\text{ Н}+10\text{ Н}+3{,}3\text{ Н}\approx 111\text{ Н}.$$

Натяжение каждой из нижних веревок при этом составляет $F_0-Ma_1/3\approx 1{,}7$ Н – они в этом случае натянуты. Для второго случая $a_2=2$ м/с^2 нижние веревки уже

[1] *Формулировка задачи несколько изменена, ибо первоначальная формулировка пока не получила своего решения.*

не натянуты, тогда натяжение верхней веревки равно $F_2 = Mg + Ma_2 = 98\ \text{Н} + 20\ \text{Н} = 118\ \text{Н}$.

А.Веревкин

Ф1820. *Толстостенная капиллярная трубка из стекла с внутренним диаметром 0,5 мм, внешним диаметром 5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.*

Для расчета необходимой силы F нужно учесть, что на стеклянную трубку вниз действуют сила тяжести трубки и силы сцепления со стороны воды на внутренней и на внешней окружностях трубки, а вверх действует сила Архимеда. Сила тяжести трубки равна

$$Mg = \rho_{\text{ст}}\pi\left(R^2 - r^2\right)Hg \approx 9{,}3\cdot 10^{\ 2}\ \text{Н}.$$

Сила Архимеда, действующая со стороны воды на погруженную часть трубки, равна

$$F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}}\pi\left(R^2 - r^2\right)\frac{H}{2}g = \frac{Mg}{4} \approx 2{,}3\cdot 10^{\ 2}\ \text{Н}.$$

Высота подъема воды в таком капилляре может достигать величины

$$h = \frac{2\sigma}{\rho_{\text{в}}gr} = 0{,}056\ \text{м} = 5{,}6\ \text{см},$$

что больше половины длины трубки (части ее над водой). В этом случае трубка заполнена водой целиком, и сила сцепления водяного столба высотой $H/2$ с внутренней поверхностью трубки радиусом r равна его весу:

$$F_1 = \rho_{\text{в}}\pi r^2\frac{H}{2}g \approx 2{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{Н}.$$

Сила сцепления со стороны наружной воды (смачивание полное) равна

$$F_2 = 2\pi R\sigma \approx 2{,}2\cdot 10^{-3}\text{Н}.$$

Искомая сила составляет

$$F = Mg + F_1 + F_2 - F_{\text{А}} \approx 7{,}2\cdot 10^{\ 2}\ \text{Н}.$$

Р.Александров

Ф1821. *Плоский конденсатор емкостью С с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q. Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R. Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.*

Заряды с одной пластины на другую будут перетекать, пока потенциалы пластин не сравняются. Равенство потенциалов наступит, когда перетечет заряд $Q/2$. При этом поле в пространстве между пластинами исчезнет, а поле снаружи не изменится. Следовательно, в виде тепла выделится энергия поля, которое существовало в пространстве между пластинами до перетекания заряда. Это поле создавалось пластиной с зарядом Q; но точно такое же поле будет у нашего конденсатора, если его пластины получат заряды $+Q/2$ и $-Q/2$. Энергия конденсатора в этом случае составит

$$W = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

Это и есть ответ. (Заметим, что в ответ не вошло значение R. При достаточно больших R от него и в самом деле ничего не зависит – как и в обычной задаче про разряд конденсатора через резистор. Если же R не очень велико, то в процессе разряда через резистор текут значительные токи, возникшее электромагнитное поле уносит заметную часть энергии, и эта часть также перейдет в тепло, но не в резисторе.) Кстати, расчет «в лоб» – запись уравнения для изменения заряда со временем, его решение и интегрирование порций тепла – дает тот же ответ.

А.Повторов

Ф1822. *К источнику переменного напряжения подключены последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.*

При переключении «ящиков» с последовательного соединения на параллельное полное сопротивление цепи не изменилось – это возможно только в том случае, если в одном «ящике» находится катушка, а в другом конденсатор. Обозначим индуктивность катушки L, емкость конденсатора C, частоту генератора (до изменения) ω. При последовательном включении

$$U = I\omega L - \frac{I}{\omega C}, \quad \text{и} \quad I = \left|\frac{U}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}\right|.$$

Аналогично, при параллельном включении

$$I = \left|\frac{U}{\omega L} - U\omega C\right|.$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{1}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} = \omega C - \frac{1}{\omega L}, \text{ или } \omega^2 LC + \frac{1}{\omega^2 LC} = 3.$$

Обозначив $\omega^2 LC = x$, получим уравнение

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Отношение частот генератора равно отношению корней этого уравнения:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \approx 2{,}62.$$

Вот во столько раз и нужно изменить частоту генератора. А уменьшить ее или увеличить, зависит от того, выше или ниже резонансной была начальная частота.

А.Зильберман

Задачи

1. Мама и папа записали по одному натуральному числу, меньшему 100, не показывая их друг другу. При этом папа утверждает, что сумма цифр произведения записанных ими чисел равна 18. Какое число задумал папа?

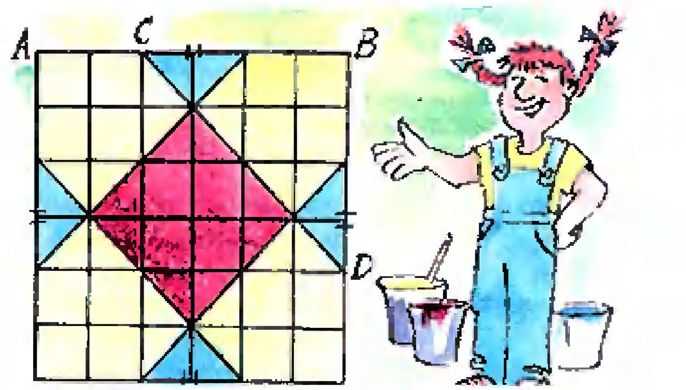
В.Замков

2. Всякая из десяти палочек имеет длину 19 сантиметров. Каждую из них разломили на две – получили двадцать палочек. Среди них не нашлось двух палочек, разница длин которых больше 9 сантиметров. Найдутся ли среди них две палочки, разница длин которых меньше полсантиметра?

В.Произволов

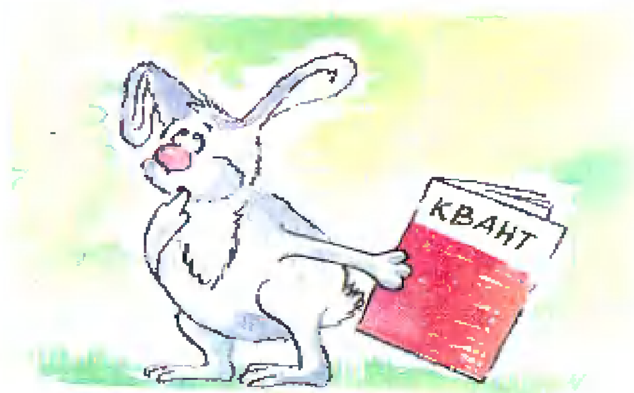
3. В показанной на рисунке симметричной фигуре красная площадь равна синей. Чему равна длина стороны квадрата AB, если длина отрезка CD – 3 сантиметра?

М.Ахмеджанова



4. Сумма некоторых десяти целых чисел равна нулю. Докажите, что сумма пятых степеней этих чисел делится на 5.

А.Зайчик



5. Найдите наименьшее число, которое можно представить в виде суммы семи последовательных натуральных чисел, суммы одиннадцати последовательных натуральных чисел или суммы тринадцати последовательных натуральных чисел, но нельзя представить в виде суммы двух последовательных натуральных чисел.

И.Акулич

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон.

1. Множество клеток прямоугольной доски 10×10 назовем важным, если любой прямоугольник 1×4, составленный из клеток доски, включает по крайней мере одну клетку этого множества. Какое наименьшее число клеток может содержать важное множество?

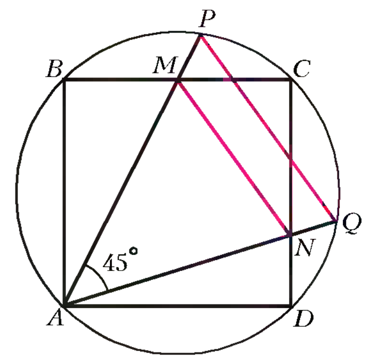
С.Дятлов

2. Среди 24 монет имеются две фальшивые: одна из них тяжелее, а другая легче настоящей монеты. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, равен ли общий вес двух фальшивых монет весу двух настоящих?

И.Николаева

3. В окружность вписан квадрат $ABCD$. Взятые на окружности точки P и Q таковы, что $\angle PAQ = 45°$. Прямая AP пересекает контур квадрата в точке M, а прямая AQ – в точке N. Докажите, что $PQ \parallel MN$.

В.Произволов



4. Число A имеет B делителей, а число B имеет $A/2$ делителей (число является делителем самого себя). Сколько делителей у числа $A + 2B$?

И.Акулич

5. Из картонного квадрата размером 5×5 вырезали пять кругов единичного диаметра. Докажите, что из оставшегося картона всегда можно вырезать два прямоугольника размером 1×2.

А.Малеев

Какая геометрия нужна пассажирам метро?

С.БОГДАНОВ, С.ДВОРЯНИНОВ, З.КРАУТЕР

Наверное, у многих, прочитавших название этой статьи, сразу же возникнут вопросы. Разве мы можем выбирать ту или иную геометрию? Во всех школах мира есть предмет с названием геометрия. Слово это обычно употребляется в единственном числе, в жизни мы редко говорим *геометрии*... Правда, учебники по этой геометрии разные, но предмет-то один, и содержание в этих книжках похожее: про треугольники, окружности и прочее.

Название же статьи говорит о том, что будто бы есть возможность *выбора* той или иной геометрии. Как-то это непривычно, и в школе об этом никогда не говорили. Правда, что-то упоминали о неевклидовой геометрии, о геометрии Лобачевского, но это было очень коротко, в конце учебного года, так что по этому поводу мало что запомнилось.

А уж о применении геометрии в метро как-то совсем странно говорить. Какая там геометрия? Сел в вагон и ждешь, когда до своей станции доедешь. Ехать скучно, за окном темнота.

Вот тут-то мы и можем начать наш разговор о геометрии метро.

В первую очередь в метро нас интересуют станции и то, как они соединены железнодорожными путями. Очень часто *на схемах* метрополитенов эти пути изображаются линиями разных цветов. Каждую линию будем называть *прямой*, а станции, расположенные на ней, — *точками, лежащими на этой прямой*.

Конечно, под землей реальный маршрут не обязательно идет по прямой, но для пассажиров это совершенно не важно. Поэтому можно сказать, что схема метро состоит из *точек* и *прямых*.

Какие же требования предъявляются к этим точкам и прямым, какие перед ними ставятся условия?

Условие А1. *Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки.*

Конечно, это условие разумно. На рисунке 1 представлена схема метро всего с двумя станциями. Жители мегаполисов могут снисходительно усмехнуться по поводу масштабов этой транспортной системы, но и такие существуют, только не под землей, а над землей, например канатные дороги, соединяющие подножие горы с ее вершиной.

Линию метро на рисунке 1 можно продолжить и построить на ней новые станции. Получится одна

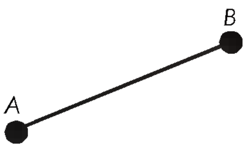


Рис. 1

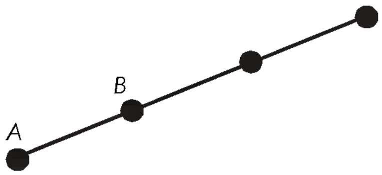


Рис. 2

прямая с несколькими станциями (рис.2). В таком случае математики говорят, что получилась геометрия из нескольких точек, лежащих на одной-единственной прямой. В частности, кольцевая схема на рисунке 3 тоже представляет собой геометрию, состоящую из одной прямой и пяти точек, лежащих на ней.

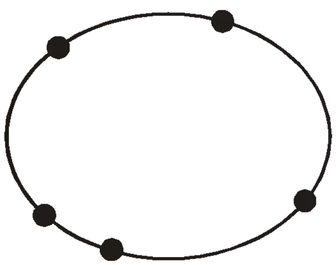


Рис. 3

Рассмотрим теперь более интересные схемы метро, в которых вместе с условием А1 выполнено новое

Условие А2. *Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Минимально возможное количество точек в этом случае равно трем. На рисунке 4 представлена схема, состоящая из трех точек и трех прямых. Особо подчеркнем, что точек именно три. На каждой из трех прямых *AB*, *BC*, *CA* лежит ровно по две точки! *Никаких других точек, кроме названных, на этих прямых нет.* Если интерпретировать рисунок 4 как схему некоторого метрополитена, то это станет особенно ясным. Пассажир не может находиться по своему желанию как угодно долго между станциями *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *A*. Нельзя, например, назначить свидание в какой-нибудь точке перегона *AB*! Следовательно, для пассажиров таких точек и не существует,

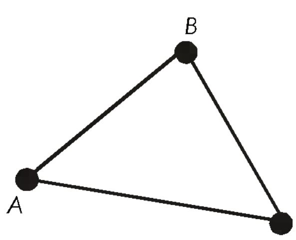


Рис. 4

Схемы на рисунке 5 содержат три прямые и девять точек. Для них выполнены условия А1 и А2.

Теперь признаемся, откуда мы взяли эти два условия. На самом деле – это две первые аксиомы из школьного учебника. Мы намерены показать, что эти аксиомы выполняются не только на знакомой нам плоскости, содержащей бесконечно много точек и

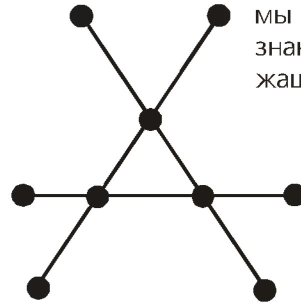
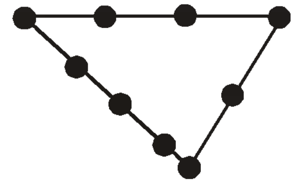



Рис. 5

бесконечно много прямых, но что они также выполняются и для геометрий, которые называются *конечными*, – в таких геометриях и множество точек, и множество прямых конечны.

Следующая, третья аксиома звучит так:

Условие А3. *Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.*

Это утверждение является теоретическим положением математики, а математика работает с идеальными,

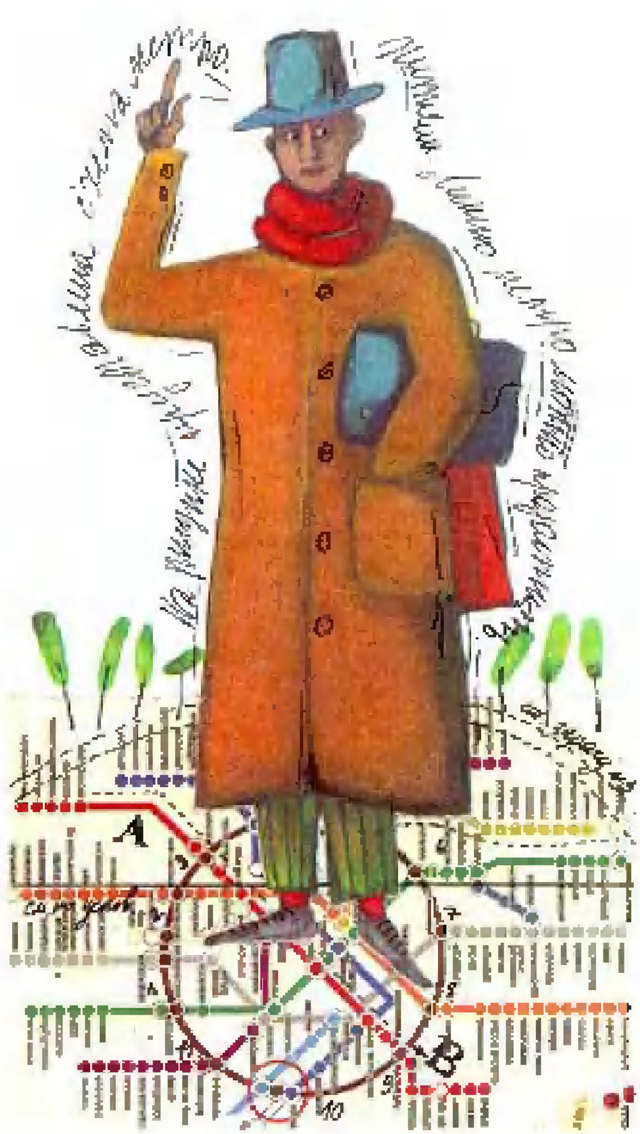


Иллюстрация В.Акатьевой

абстрактными объектами. Такие объекты соотносятся с реальностью приближенно, с некоторой долей погрешности. Например, в любой реальной модели правильного треугольника длины его сторон хоть ненамного, но отличаются одна от другой. Так обстоит дело и с условием А3. На плоскости, к которой мы привыкли на уроках геометрии и в жизни, условие А3 выполняется. А выполняется ли оно для метрополитена, с помощью которого мы интерпретируем, трактуем конечные геометрии? Конечно, нет. Разумеется, жители больших городов мечтают о том, чтобы от каждой станции до любой другой можно было бы добраться без пересадки (в этом как раз и заключается содержание третьего условия), но в жизни так практически не бывает. Не выполняется условие А3 и на рисунке 5.

В дальнейшем, тем не менее, будем считать, что для наших схем метро требование А3 имеет место: для любых двух станций имеется линия, их соединяющая, и притом только одна.

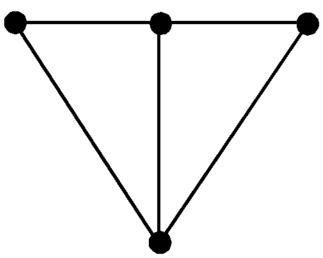


Рис. 6

Рассмотрим примеры геометрий, для которых выполнены все три условия.

Случай трех точек представлен на рисунке 4.

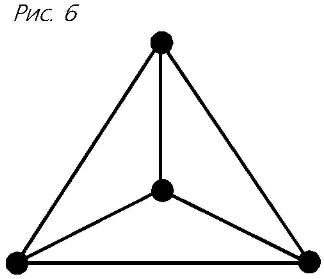


Рис. 7

Пусть даны четыре точки (четыре станции метро). На рисунке 6 имеется одна прямая с тремя точками и три прямые с двумя точками. На рисунке 7 количество прямых равно шести, на каждой прямой лежит по две точки. На этих двух рисунках прямая интерпретируется отрезком плоскости. Геометрию, соответствующую схеме на рисунке 7, можно смоделировать и другими способами. Так, на рисунке 8 прямые представлены сторонами и диагоналями четырехугольника, но пересечению диагоналей не соответствует никакая точка из нашей геометрии! Можно при этом вообразить линии метро, которые проходят под землей на разной глубине и не пересекаются. На рисунке 9 одна из прямых представлена кривой.

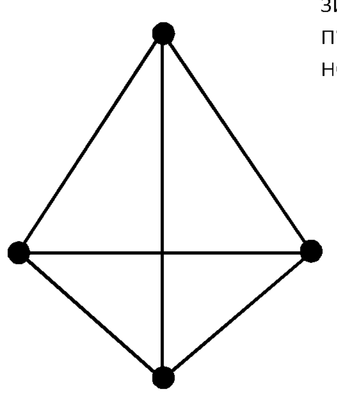


Рис. 8

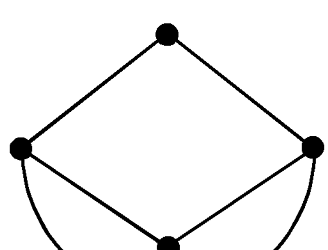


Рис. 9

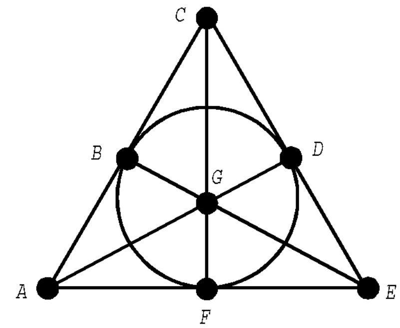


Рис. 10

На рисунке 10 представлена геометрия, содержащая семь точек A, B, C, D, E, F, G и семь прямых. На каждой прямой в этой геометрии лежит ровно по три точки. Три прямые представлены сторонами правильного треугольника, другие три прямые — его медианами, одна прямая изображается окружностью, вписанной в этот треугольник.

Надеемся, что мы никого не запутали. А запутаться на первых порах немудрено. Только что мы сказали, что *прямая* представлена *кривой*, прямая изображается *окружностью*...

Напомним поэтому, что в геометрии понятия точки и прямой являются первичными, они никак не определяются. Важны лишь отношения между точками и прямыми, которые выражаются в аксиомах.

Помните поговорку: как угодно назови, хоть горшком, только в печь не ставь? Так и в геометрии: *любые* объекты можно назвать точками и прямыми, лишь бы они *удовлетворяли* перечисленным *условиям-аксиомам*. Здесь уместно вспомнить слова Анри Пуанкаре о том, что «математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам». Отсюда вытекает поразительная универсальность математических моделей и такая эффективность математики в приложениях, которую Нобелевский лауреат по физике Ю.Вигнер назвал непостижимой. В.В.Маяковский заметил, что, с точки зрения математики, формула «два и два — четыре» — истина и для складывания двух окурков с двумя окурками, и для складывания паровозов.

Аксиоматический метод является одним из основных и важнейших в математике. Освоить любой метод можно, лишь решая задачи. Поэтому мы предлагаем потренироваться в обращении с аксиомами, определяющими конечные геометрии.

Для геометрии из четырех точек и шести прямых можно рассмотреть пространственную модель. Точки в этой модели — это вершины тетраэдра, прямые — ребра этого тетраэдра (рис.11). Можно вообразить реальный метрополитен, расположенный внутри некоторой горы, с такой схемой.

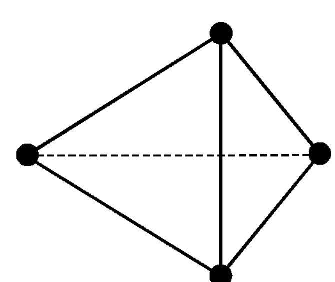


Рис. 11

Нетрудно доказать, что в геометрии с четырьмя точками количество прямых не превосходит шести. Действительно, пусть каждая из четырех точек соединена прямой с любой из трех других. Таких

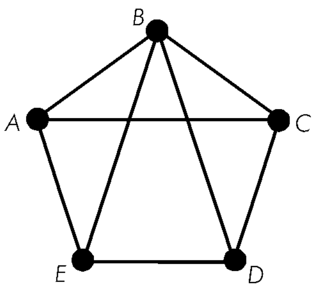


Рис. 12

прямых, стало быть, три. Произведение 4×3 равно 12, но при этом каждая прямая считается дважды. Следовательно, наибольшее количество прямых не превосходит шести.

Пусть теперь метрополитен содержит пять станций. Это означает, что мы рассматриваем конечную геометрию с пятью точками. В этом случае максимально возможное количество прямых определяется формулой $\frac{4 \times 5}{2} = 10$. При этом каждая из пяти точек соединена прямой с каждой из четырех остальных точек, и на этой прямой других точек – кроме этих двух – нет. Такая схема представлена на рисунке 12. Точки – это вершины правильного пятиугольника, прямые – все возможные попарно соединяющие их отрезки. С точки зрения конечной геометрии, это могут быть отрезки прямых или дуги каких-либо кривых. В данной геометрии это абсолютно неважно. Соединение каким-либо образом двух точек лишь выражает тот факт, что через эти две точки проходит прямая из этой геометрии.

На рисунке 13 принадлежность точек той или иной

Точки / Прямые	A	B	C	D	E
$AB = L_1$	×	×			
$AC = L_2$	×		×		
$AD = L_3$	×			×	
$AD = L_4$	×				×
$AD = L_5$		×	×		
$AD = L_6$		×		×	
$AD = L_7$		×			×
$AD = L_8$			×	×	
$AD = L_9$			×		×
$AD = L_{10}$				×	×

Рис. 13

прямой представлена в виде диаграммы. Каждой горизонтальной строке таблицы соответствует прямая из геометрии. Двигаясь вдоль каждой горизонтальной строки этой таблицы, легко определить, какие точки лежат на соответствующей прямой. Выбор точки означает выбор вертикального столбца таблицы. Двигаясь по каждому вертикальному столбцу, можно установить, какие прямые проходят через соответствующую точку.

Рассмотрим конечную геометрию, содержащую шесть точек. Два из возможных вариантов расположения точек на прямых представлены на рисунках 14 и 15.

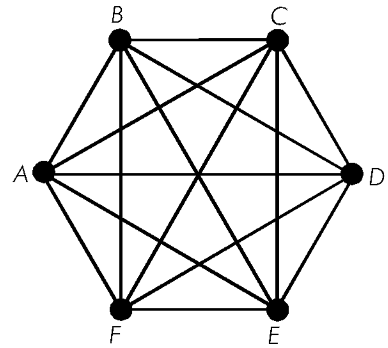


Рис. 14

В конечных геометриях используется привычное определение пересекающихся прямых. *Пересекающимися* называют прямые, имеющие одну общую точку. Из первых четырех строк рисунка 13 следует, что прямые L_1, L_2, L_3 и L_4 пересекаются в точке A, прямые L_4 и L_9 пересекаются в точке E.

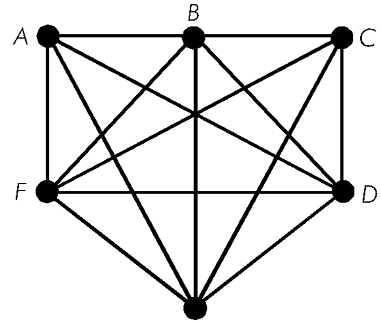


Рис. 15

Упражнение 1

а) Установите, какому их двух рисунков 14 или 15 отвечает диаграмма на рисунке 16.

б) Через какие точки проходит прямая L_{10}?

в) Назовите прямую, проходящую через точки B и D, через точки F и A.

Точки / Прямые	A	B	C	D	E	F
L_1	×	×	×			
L_2			×	×		
L_3				×	×	
L_4					×	×
L_5	×					×
L_6	×			×		
L_7	×				×	
L_8		×		×		
L_9		×			×	
L_{10}		×				×
L_{11}			×		×	
L_{12}			×			×
L_{13}				×		×

Рис. 16

г) Назовите прямую, проходящую через три точки. Сколько имеется таких прямых?

д) Пересекаются ли прямые L_7 и L_{11}, L_5 и L_{11}? В каких точках?

е) Укажите прямую на рисунке, соответствующую каждой строке этой диаграммы.

На рисунке 17 представлена диаграмма, соответствующая конечной геометрии, модель которой изображена на рисунке 10.

Точки / Прямые	A	B	C	D	E	F	G
l_1	×	×	×				
l_2			×	×	×		
l_3	×				×	×	
l_4	×			×			×
l_5		×			×		×
l_6							
l_7		×		×		×	

Рис. 17

Упражнение 2

а) В диаграмме на рисунке 17 строка, соответствующая прямой l_6, не заполнена. Определите, какие точки лежат на прямой l_6, и заполните эту строку.

б) Пользуясь диаграммой на рисунке 17, назовите прямые, пересекающиеся в точке E. Проверьте ответ, используя рисунок 10.

в) Составьте диаграммы для геометрий, представленных на рисунках 6 и 7.

В конечных геометриях используется хорошо знакомое определение параллельных прямых: прямые называют *параллельными*, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

В геометрии на рисунке 4 параллельных прямых нет – любые две прямые из трех имеющихся пересекаются. Нет параллельных прямых и на рисунках 5, 6, 10. (Контрольный вопрос: в какой точке на рисунке 10 пересекаются прямые, одна из которых проходит через точки F и D, а другая – через точки G и E?)

Геометрию, в которой нет параллельных прямых (т.е. любые две прямые пересекаются), называют *проективной геометрией*. В такой геометрии принимается следующая **аксиома А4–Р:** *любые две прямые или совпадают, или пересекаются.* (Здесь буква Р в обозначении – от слова *проективная*.)

Вспомним, как звучит соответствующая **аксиома А4–А** о параллельных из школьного учебника: *через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.* Такие геометрии называют *аффинными геометриями*. (От слова аффинная – вторая буква А в обозначении.)

Модель конечной аффинной геометрии представлена на рисунках 7, 8, 9, 11.

В *гиперболической геометрии* (или геометрии Лобачевского) принимается такая **аксиома А4–G:** *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, параллельных данной прямой.* Буква G в обозначении аксиомы – от слова *гиперболическая*. Конечные геометрии с такой аксиомой представлены на рисунках 12, 14, 15. Так, на рисунке 12 прямые BC и CD, проходящие через точку C, параллельны прямой AE.

Таким образом, в нашей воображаемой геометрии метро могут быть реализованы три различные геометрии: проективная, в которой выполнены условия **А1, А2, А3, А4–Р,** аффинная – с условиями **А1, А2, А3, А4–А,** гиперболическая – с аксиомами **А1, А2, А3, А4–G.**

Мы рассказали о различных примерах конечных геометрий и их моделях. При этом прямая была представлена либо некоторой линией, либо ребром многогранника, либо строкой таблицы. Опишем теперь построение *арифметической* модели, пригодной для интерпретации любой конечной геометрии. В этом случае *точками* будем называть различные простые числа, а *прямыми* – произведения некоторых из этих чисел.

Например, точки на рисунке 4 можно трактовать как числа 2, 3, 5, а прямые – как числа 6, 10, 15, равные их попарным произведениям.

Пусть точки на рисунке 6 – это числа 2, 3, 5, 7. Тогда прямые – это числа 14, 21, 35 и 30. На последней прямой 30 лежат три точки 2, 3 и 5 – произведение этих чисел как раз равно 30.

Рассмотрим в такой геометрии прямую b и точку a (здесь a – простое число, b –составное число, имеющее по аксиоме **А1** по крайней мере два простых сомножителя). Будем говорить, что *прямая b проходит через точку a*, если число a является делителем числа b. Ясно, что *прямые b и c пересекаются в точке a*, если НОД(b, c) $= a$, где НОД(b, c) – наибольший общий делитель чисел b и c. И наконец, *прямые b и c являются параллельными*, если НОД(b, c) = 1, т.е. b и c – взаимно простые числа.

Например, геометрия, представленная на рисунке 12 (или в таблице 13), может быть образована пятью точками – пятью простыми числами 2, 3, 5, 7, 11 и десятью прямыми – попарными произведениями этих простых чисел: $2\times3 = 6$; $2\times5 = 10$; $2\times7 = 14$; $2\times11 = 22$; $3\times5 = 15$; $3\times7 = 21$; $3\times11 = 33$; $5\times7 = 35$, $5\times11 = 55$; $7\times11 = 77$. Здесь прямые 22 и 21 параллельны, так как НОД(22, 21) = 1, а прямые 15 и 35 пересекаются в точке 5, ибо НОД(15,35) = 5.

Упражнение 3

а) Точки в геометрии на рисунке 12 отождествим с простыми числами 13, 17, 19, 31, 37. Укажите все прямые в этой геометрии. Через какие точки проходит прямая 527?

б) Пересекаются ли прямые 527 и 323?

в) Докажите, что прямые 527 и 481 параллельны.

г) Постройте арифметические модели всех рассмотренных выше геометрий и проверьте выполнение аксиом для некоторых элементов этих геометрий.

В заключение заметим, что в геометрии, изучаемой в школе, выполняются аксиомы **А1, А2, А3, А4–А**. Следовательно, школьная геометрия является аффинной. Она, как хорошо известно, не является конечной. Существуют также проективные и гиперболические геометрии, не являющиеся конечными.

Встреча в пути

С.ВАРЛАМОВ

Встретились однажды школьник и инопланетянин.

Ш. — У меня есть автомобиль!

И. — А что это такое?

Ш. — Как что? «Авто» — сам, «мобиль» — движется.

И. — А что такое «движется»?

Ш. — Ну, когда он едет по дороге.

И. — А-а... Понятно. А что, «движется» — это возможно только по дороге?

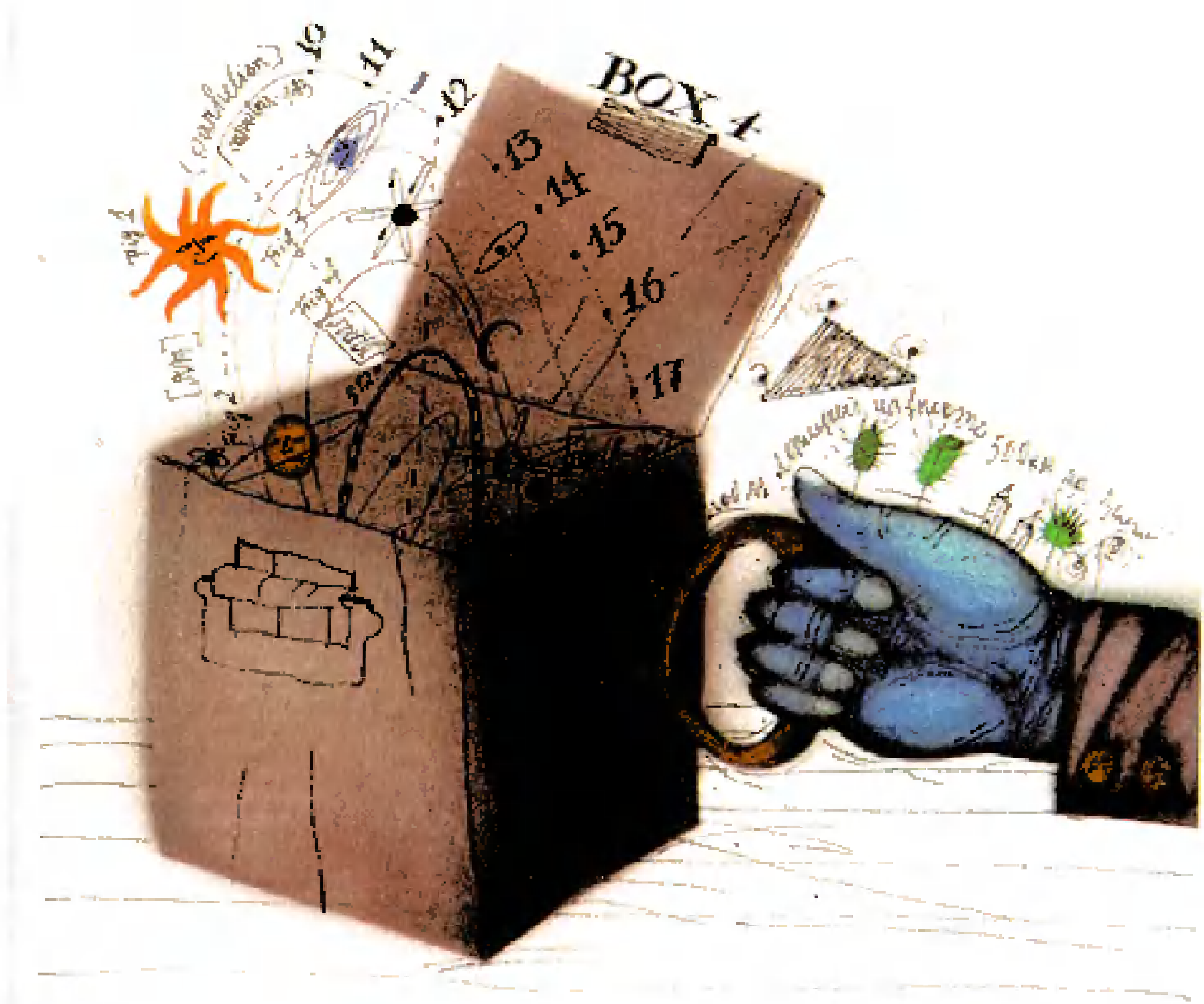
Ш. — Нет, конечно. Можно и по полю, а можно и в воздухе, если, например, с разгона въехать на бугорок. Да у меня же есть фотографии. Вот смотри!

И. — Ну и где он движется?

Ш. — Да... На фотографии движения не видно. Это потому, что она фиксирует расположение предметов в один момент времени, в одно мгновение.

И. — А что такое «время» и «мгновение»?

Ш. — Ну, ты даешь! Есть (т.е. было) «прошлое» — то, что было раньше. Есть «настоящее» — то, что есть сейчас. И есть (т.е. будет) «будущее» — то, чего еще не было, но будет. Вот смотри — еще одна фотография, сделанная через небольшой промежуток времени после первой. Видишь, относительно дома автомобиль со своего прежнего места передвинулся на новое. Вот это и есть движение: первый предмет по отношению ко второму предмету через некоторое время изменил



Самосовмещения

На рисунке 1 слева все буквы латинского алфавита выписаны в пять строк. Справа по тому же правилу выписаны буквы русского алфавита. Что же это за правило?

AMTUVWY	АДЛМПТШ
BCDEK	ВЕЗКСЭЮ
HIOX	ЖНОФХ
NSZ	И
FGJLPQR	БГЁЙРУЦЧЩЪЫЬЯ

Рис. 1

Буквы первой строки имеют вертикальную ось симметрии. Второй – горизонтальную. Третьей – и вертикальную, и горизонтальную оси симметрии, а также центр симметрии. Буквы четвертой строки имеют только центр симметрии. Наконец, буквы последней строки не имеют ни осей, ни центров симметрии.

Впрочем, классификация букв по тому, какими симметриями они обладают, вряд ли интересна для филолога. А вот геометр привык к такой классификации выпуклых четырехугольников. Скорее всего, вы знакомы с ней. Напомню ее, указав в каждом случае группу самосовмещений фигуры: неправильный четырехугольник (рис.2, $\{id\}$); паралле-

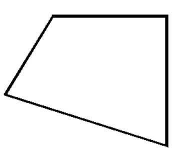


Рис. 2

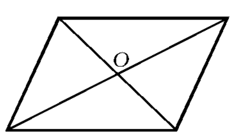


Рис. 3

лограмм[1] (рис.3, $\{id, R_O^{180^\circ}\}$); дельтоид (рис.4, $\{id, S_{AC}\}$); равнобокая трапеция (рис.5, $\{id, S_n\}$); прямоугольник[2] (рис. 6, $\{id, R_O^{180^\circ}, S_n, S_m\}$); ромб (рис.7, $\{id, R_O^{180^\circ}, S_{AC}, S_{BD}\}$); квадрат (рис. 8, $\{id, R_O^{90^\circ}, R_O^{180^\circ}, R_O^{270^\circ},$

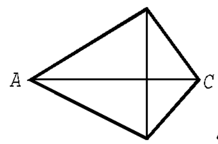


Рис. 4

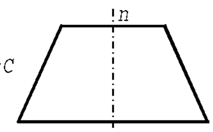


Рис. 5

$S_{AC}, S_{BD}, S_n, S_m\}$). Здесь использованы общепринятые обозначения: id – тождественное отобра-

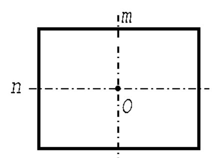


Рис. 6

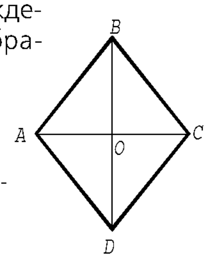


Рис. 7

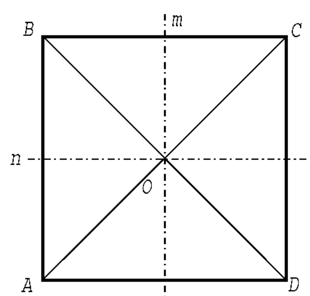


Рис. 8

жение, т.е. отображение, которое оставляет все точки фигуры на месте; R_O^{φ} – поворот вокруг точки O на угол φ против часовой стрелки; S_n – симметрия относительно прямой n.

Треугольники тоже классифицируют в зависимости от того, какова группа самосовмещений: неправильный треугольник (рис.9, $\{id\}$); равнобедренный неравносторонний треугольник (рис.10, $\{id, S_n\}$); рав-

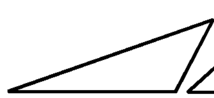


Рис. 9

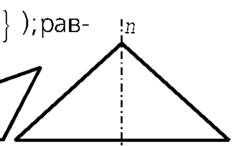


Рис. 10

носторонний треугольник (рис.11, $\{id, R_O^{120^\circ}, R_O^{240^\circ}, S_a, S_b, S_c\}$).

Впрочем, я забыл сказать, что такое самосовмещение. Это отображение, сохраняющее расстояния. Точнее говоря, для любых

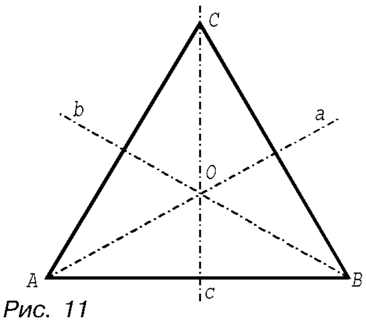


Рис. 11

двух точек X и Y фигуры расстояние между их образами X' и Y' должно быть равно расстоянию между исходными точками:

$$X'Y' = XY.$$

Разумеется, вершины многоугольника при самосовмещении переходят в вершины, так что можно следить только за перестановкой вершин.

Задачи

1. Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

2. 11 точек расположены на плоскости симметрично относительно прямых n и m. Обязана ли одна из этих точек быть точкой пересечения прямых n и m?

3. Придумайте фигуру, которая выдерживает поворот на 90°, но не имеет ни одной оси симметрии.

Ответы и указания к этим и следующим задачам вы найдете в конце журнала.

Перейдем от плоскости к пространству. Повернем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вокруг прямой AC_1 на 120°, как показано на рисунке 12. Тогда точка B перейдет в точку A_1, которая перейдет в D, которая, в свою очередь, перейдет в B. Аналогично, $B_1 \to D_1 \to C \to B_1$. Значит, прямая AC_1 – ось вращения куба.

Прямые BD_1, CA_1 и DB_1 тоже являются его осями вращения: поворот вокруг любой из них на 120° переводит куб в себя.

Есть у куба и оси симметрии. Например, прямая, проходящая через середины противоположных ребер AD и B_1C_1.

[1] Не являющийся ромбом!
[2] Не являющийся квадратом!

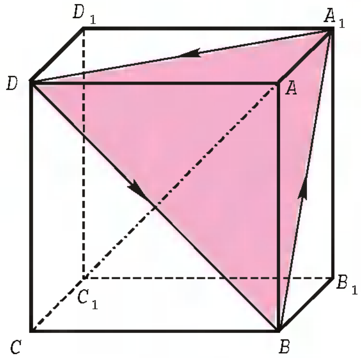


Рис. 12

Задача 4. Сколько осей симметрии имеет куб?

Рассмотрим теперь правильный тетраэдр $ABCD$ (рис.13). Прямая n, проходящая через середины противоположных ребер AB и

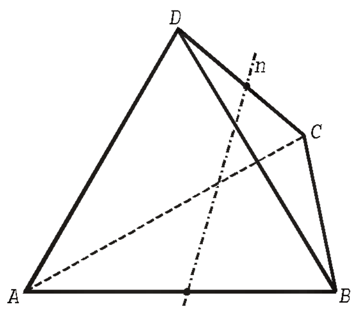


Рис. 13

CD, перпендикулярна им. Поэтому она является осью симметрии тетраэдра.

Задачи

5. Сколько осей симметрии имеет правильный тетраэдр?

6. Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии, где $k \geq 1$, то k нечетно.

7 (М555). Рассмотрим пересечение а) двух; б) трех цилиндров одинакового радиуса, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение?

Помимо вращений вокруг прямых, тетраэдр и куб имеют и другие самосовмещения. Например, у куба есть симметрия относительно плоскости ACC_1A_1 или относительно плоскости, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

Давайте сосчитаем количество самосовмещений правильного тетраэдра $ABCD$. Посмотрим пристально на его вершину A. Очевидно, при самосовмещении точка A может перейти в любую из четырех вершин A, B, C, D. Затем три остальные вершины B, C и D могут перейти в любом порядке в оставшиеся (после того, как одну из вершин заняла точка A) три вершины тетраэдра. Поскольку количество способов разложить три данные точки в три места равно шести, то группа самосовмещений тетраэдра состоит из $4 \cdot 6 = 24$ элементов. (Между прочим, если вы сделаете тетраэдр из металла или дерева и начнете перемещать его в пространстве, то сможете выполнить не все 24, а только 12 перемещений – те, которые сохраняют ориентацию[3] пространства.)

Задачи

8. Сколько самосовмещений имеет а) куб; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр? Сколько из них сохраняют ориентацию, а сколько меняют?

9. Инопланетяне делают игрушки в форме а) куба; б) октаэдра; в) додекаэдра; г) икосаэдра и раскрашивают каждую грань в один из а) 6; б) 8; в) 12; г) 20 имеющихся цветов, каждую грань – в свой цвет. Сколько разных видов игрушек они могут изготовить? (Игрушки одинаковые, если одну из них так можно повернуть в пространстве, что она станет такой же, как другая.)

Множество Φ называют транзитивным, если для любых двух его точек A и B существует самосовмещение f множества Φ, которое переводит A в B. Например, множество вершин правильного многоугольника транзитивно.

Задачи

10. Придумайте транзитивное множество, состоящее из 10 точек, не являющихся вершинами правильного 10-угольника.

11. Перечислите все конечные транзитивные подмножества плоскости.

[3] Я не могу здесь подробно обсуждать понятие ориентации. Скажу лишь, что вращение вокруг прямой сохраняет ориентацию, а симметрия относительно плоскости – меняет.

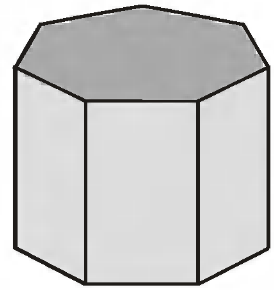


Рис. 14

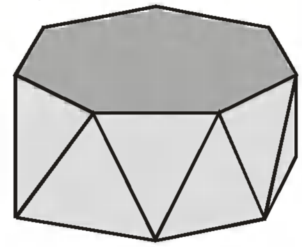


Рис. 15

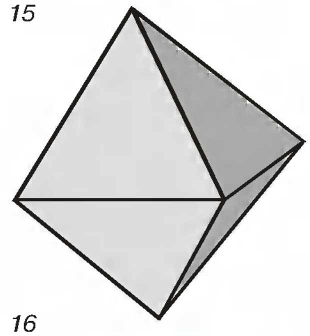


Рис. 16

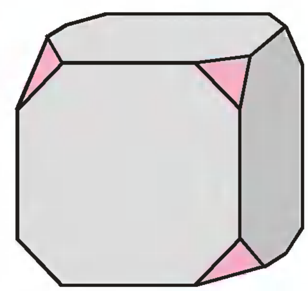


Рис. 17

Подробнее о транзитивных множествах можно прочитать в статьях В.Болтянского «Транзитивные множества и правильные многогранники» («Квант» №7 за 1980 год) и А.Шкляра «О транзитивных многогранниках» («Квант» №12 за 1980 год). Не имея здесь возможности подробно пересказывать содержание этих статей, ограничусь несколькими примерами транзитивных многогранников. Это правильная семиугольная призма (рис.14), антипризма (рис.15), октаэдр (рис.16) и усеченный куб (рис.17).

А.Спивак

свое расположение. А слово «мгновение» возникло от глагола «мигать». Мигают люди глазами. За время одного «мига» предметы смещаются очень мало, практически это незаметно.

И. — А если второго предмета нет, тогда как быть?

Ш. — В этом случае бессмысленно говорить о движении, ведь отсчитывать перемещение не от чего.

И. — Понял. Значит, если все предметы разбить на пары «первый—второй», то первый движется относительно второго. А второй что делает?

Ш. — Тоже движется.

И. — Как?!

Ш. — Относительно первого. И вообще, пары предметов можно выбирать самые разные. По отношению к некоторым предметам автомобиль движется, а по отношению к другим — нет. Движение относительно! Чтобы не было путаницы, нужно заранее договориться, относительно какого предмета мы хотим описать расположение и движение автомобиля.

И. — А кто это внутри автомобиля?

Ш. — Я, конечно! И вот, кстати, пока я сидел за рулем, относительно меня автомобиль не двигался. А ездил я к своей бабушке в деревню, что находится в ста километрах к северу от Москвы. То есть если двигаться по прямой и строго на север, то переместиться нужно будет на 100 км. Вот смотри, я на карте нарисовал стрелку: начало ее в одной точке, конец в другой, а длина соответствует 100 км. А на спидометре накрутило 150 км — это путь. Мы ведь заезжали в магазины за продуктами, потом на участке дороги шел ремонт и пришлось ехать в объезд. Вся дорога заняла четыре часа, поэтому перемещались мы на север со средней скоростью 25 километров в час. А относительно дороги мы (я и автомобиль) двигались и со скоростью 100 км/ч — с ветерком по хорошей дороге, и ползли в «пробке» со скоростью пешехода 4 км/ч, а перед железнодорожным переездом вообще стояли на месте с нулевой скоростью — ждали пока поезд проедет.

И. — Так, подожди. Со средней скоростью мне все понятно: разделили перемещение «100 км на север» на время движения «4 часа» и получили те самые «25 км/ч на север». Еще и стрелочку на карте нарисовали. А что это за скорости 100 км/ч, 4 км/ч, 0 км/ч, о которых ты мне говорил?

Ш. — А это так называемые мгновенные скорости.

И. — Постой, ведь ты говорил, что за «миг», или «мгновение», предметы не перемещаются!?

Ш. — Нет, они перемещаются, конечно. Но перемещение это мало. Однако если мы разделим одну малую величину — перемещение, на другую малую величину — продолжительность «мига», результат может быть вовсе и не маленьким. Кстати, космический корабль, летающий на высоте 500 километров над Землей, за «миг», т.е. примерно за 0,1 секунду, смещается относительно Земли приблизительно на 700 метров — это совсем не мало. А за тот же «миг» автомобиль, движущийся со скоростью 100 километров в час, смещается почти на 3 метра. Знаешь, какое приятное ощущение, когда мимо тебя пролетают на скорости 100 км/ч телеграфные столбы, деревья, дома и мосты.

И. — Не понял! Как это они вдруг полетели?

Ш. — Да, я не прав. Я забыл сообщить тебе, что мысленно изменил систему отсчета и теперь рассматриваю движение предметов относительно себя и моего автомобиля.

И. — Ага! Давай теперь я расскажу о своем путешествии. Я летел на вашу Землю целый час. Когда я отправлялся в путь, Солнце, Земля и Марс, а я оттуда родом, располагались на одной прямой. Расстояние между Марсом и Землей было 56 млн км. Выходит, моя средняя скорость относительно Солнца была направлена на Солнце и равна по величине 56 млн км/ч. С космодрома на Марсе мой корабль поднимался со скоростью 100 км/ч относительно Марса. А перед посадкой на поверхность Земли корабль опускался со скоростью 4 км/ч относительно Земли — как пешеход. Правда, в промежутке между взлетом и посадкой никакие деревья и телеграфные столбы не летели мне навстречу. И похоже, что по величине перемещение и путь были одинаковыми. Магазинов на пути не было, и в объезд двигаться не приходилось.

Ш. — Вот здорово! Все понятно! Жаль только, что мне сейчас нужно в школу бежать. Давай еще как-нибудь встретимся.

И. — Хорошо. Только нужно сверить часы и договориться, относительно какого тела будем указывать координаты.

Ш. — До свидания! Ты только, пожалуйста, не летай слишком быстро на своем корабле, а то вдруг наши часы будут разное время показывать.

И. — Тебе тоже вовсе не следует ездить со скоростью 100 км/ч, а то летящие деревья и телеграфные столбы могут ненароком задеть автомобиль.

Ш. — Да это я хвастал. На самом деле вел автомобиль папа, а он уже двадцать лет за рулем.

И. — Как, все двадцать лет без движения относительно автомобиля?

Ш. — Прости, бегу. Не понимай слова буквально! До встречи!

ЭТА СОВРЕМЕННАЯ ДРЕВНЯЯ ОПТИКА

Т.ХАННАНОВА, Н.ХАННАНОВ

С МОМЕНТА ИЗОБРЕТЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ генераторов – лазеров – не прошло и полвека. Однако применение лазера оказалось столь разнообразным, что современный школьник с трудом верит, что всего 40 лет назад слова «лазер» просто не существовало. Малая расходимость светового пучка, большая интенсивность, когерентность и поляризованность излучения лазера позволяют создавать на его основе и «скальпель» для хирурга, и «циркуль» для астронома, и «носитель информации» для пользователей компьютера.

В настоящее время именно свет лазера играет огромную роль в передаче и переработке информации. Общеизвестно использование лазера в линиях оптоволоконной связи, в таких устройствах, как CD ROM и лазерный принтер. С постепенным переходом на магнитооптические диски он начинает использоваться и для записи информации на жесткий диск компьютера.

Выйдя из стен научных и военных лабораторий, лазер «примостился» на поясе современного тинэйджера в виде CD-плеера или брелока для ключей. Давайте попробуем использовать лазерный брелок или лазерную указку для простых, наглядных, но от того не менее интересных исследований в домашних условиях явлений геометрической и волновой оптики – явлений, открытых и изученных задолго до рождения даже самой идеи создания лазера.

Единственное, о чем необходимо напомнить перед экспериментом с лазером еще раз, – НЕЛЬЗЯ ДОПУСКАТЬ ПРЯМОГО ПОПАДАНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ГЛАЗ! Локализация на малом участке сетчатки глаза большой энергии может привести к разрушению этих участков. И еще – экономьте энергию батареек, для фиксации положения светового пятна достаточно лишь ненадолго включить его. Это, кстати, будет беречь и ваши глаза, так как отраженное лазерное излучение тоже может быть достаточно интенсивным.

Почему ошибался Птолемей, или О чем говорят пластиковые бутылки?

Как вы уже догадались, помимо лазерного брелока (указки) нам понадобится еще пластиковая бутылка, заполненная водой, а также линейка (желательно длинная, около 100 см) и угольник.

Наша цель – исследовать явления преломления света на границе двух сред. Древнегреческий ученый Клавдий Птолемей (ок. 90 – ок. 160) впервые описал закон преломления света, связывающий угол падения α и угол преломления γ (рис.1). В его распоряжении были две линейки CM и DM, прикрепленные к диску и вращающиеся вокруг точки M. Опуская нижнюю часть диска с линейкой в воду, он добивался того, чтобы глазу казалось, что нижняя и верхняя линейки образуют прямую линию $C'MD$. Это означало, что нижняя линейка расположена так, что лучи, выходящие из точки C и формирующие ее мнимое изображение, преломляются на границе вода – воздух, и изображение точки получается в C'. Затем диск вынимался, и по делениям на диске измерялись соответствующие углы. Птолемею удалось довольно точно измерить эти углы и установить, что отношение углов падения и преломления остается величиной постоянной:

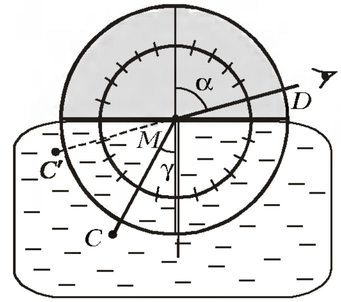


Рис. 1

$$\alpha/\gamma = n .$$

В учебниках обычно приводится другой закон преломления, называемый законом Снеллиуса:

$$\sin\alpha/\sin\gamma = n .$$

Его формулировка была обнаружена в рукописях голландского астронома и математика Виллеброрда Снеллиуса (1580–1626) после его смерти.

Кто же прав? Может, Птолемей не знал, что такое синус угла? Или Снеллиус сомневался в том, что он прав, и поэтому не опубликовал свой результат? Попробуем ответить на эти вопросы с помощью ... лазерной указки и пластиковой бутылки с газировкой. Лучше выбрать бутылку побольше – и не только потому, что точность будет выше.

Как же, не раскрывая бутылки, найти плоскую поверхность, на которую можно пустить «луч падающий»? Посмотрите на осевое сечение бутылки (рис.2). Верхняя его часть похожа на сечение треугольной призмы, нижняя – на сечение плоскопараллельной пластины. Ход лучей в этих классических оптических системах хорошо известен (возможно, в школе вы даже выполняли лабораторную работу с этими специально изготовленными изделиями). Если найти на цилиндрической бутылке это осевое сечение, зафиксировать точки вхождения и выхода луча и измерить угол, под которым луч падает на плоскость, задача была бы решена. Но как найти это сечение?

Зафиксируйте место падения лазерного луча на стену, проведите соответствующую вертикальную линию, затем двигайте бутылку по горизонтальному столу до тех пор, пока луч, прошедший сквозь бутылку, не попадет на ту же вертикаль. Дальнейшее измерение углов падения и преломления является делом техники. Угол падения равен углу, под которым луч выходит из бутылки (что хорошо известно для плоскопараллельной пластинки). Нужно зафиксировать точки входа и выхода луча, измерить расстояния H_1 и H_2 от

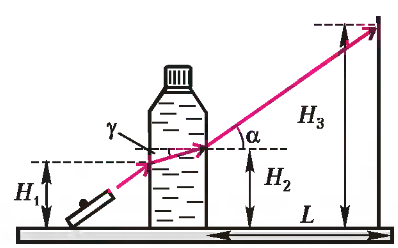


Рис. 2

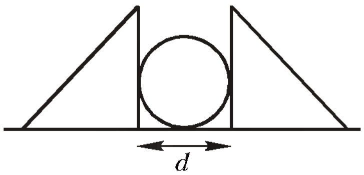


Рис. 3

стола до этих точек, расстояние L от бутылки до стены, куда падает луч, и высоту H_3 (см. рис.2). Для расчетов понадобится и диаметр бутылки d, который проще всего измерить с помощью угольника и линейки (рис.3).

Теперь надо провести несколько измерений и заполнить таблицу:

d, мм	H_1, мм	H_2, мм	H_3, мм	L, мм	$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{H_3 - H_2}{L}$	$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{H_2 - H_1}{d}$	$\sin\alpha$	$\sin\gamma$
99 ± 1	174 ± 2	215 ± 2	508 ± 5	574 ± 2	$\alpha_{мин} = 26{,}4^\circ$ $\alpha_{мак} = 27{,}7^\circ$	$\gamma_{мин} = 20{,}3^\circ$ $\gamma_{мак} = 24{,}6^\circ$	0,44–0,46	0,35–0,42

Отметим, что после смены очередного угла падения легче не целиться в предыдущее осевое сечение, а искать его заново, двигая бутылку.

Получив данные при нескольких углах, постройте график зависимости угла преломления от угла падения (по Птолемею) и график зависимости синуса угла преломления от синуса угла падения (по Снеллиусу). Не забудьте отложить на этих графиках ошибки измерений. Не вдаваясь в теорию экспериментальных ошибок, будем считать, что значение угла может иметь максимальное и минимальное значения. Если, скажем, угол падения вы определяете по его тангенсу, то оцените, в каких пределах могут лежать длины катетов (цена деления прибора плюс ошибка процедуры фиксирования начала и конца измеряемого отрезка) соответствующего треугольника. Максимальное значение тангенса угла получается делением максимальной длины противолежащего катета на минимальное значение прилежащего катета. По таблицам или на калькуляторе находится соответствующее максимальное значение угла α. Аналогично рассчитывается и минимальное значение угла α.

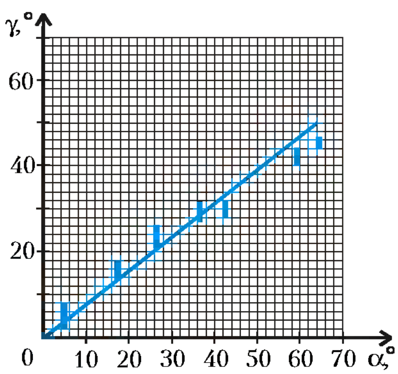


Рис. 4

На рисунках 4 и 5 приведены типичные графики, получаемые в таких измерениях. Видно, что отклонение от закона преломления Птолемея превышает экспериментальную ошибку только при больших углах падения. Если этих измерений недостаточно или они проведены с большой ошибкой, то следует подумать, как уменьшить эту ошибку. Как видно из графика, ошибка особенно велика при определении угла преломления в воде. Это связано с тем, что луч лазера имеет конечную ширину. При малых γ для определения тангенса этого угла приходится использовать разность высот $H_2 - H_1$, которая мала (луч слабо отклоняется по вертикали внутри бутылки). Сами же значения H_2 и H_1 имеют конечную ошибку, связанную с шириной луча. При больших значениях γ разность $H_2 - H_1$ растет, но при этом выходное пятно на высоте H_2 существенно уширяется. С этим увеличением расходимости выходящего пучка света связана точность в определении H_3, а следовательно, и $\operatorname{tg}\alpha$ при больших углах падения. Исправить ситуацию можно, увеличив диаметр бутылки, например взяв десятилитровую бутыль (они сейчас тоже появились в продаже).

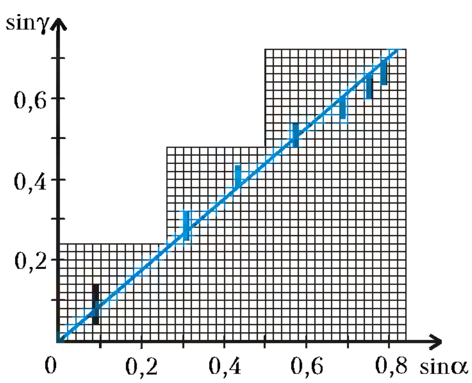


Рис. 5

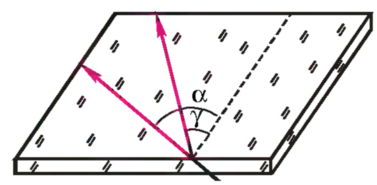


Рис. 6

Имея в руках лазер, можно добиться еще более четкого доказательства отклонения от закона Птолемея $\alpha/\gamma = n$. Например, изучив преломление на границах, образованных стеклянными торцами стекла для книжных полок, где при достаточной прозрачности торца можно умудриться одновременно увидеть и луч падающий, и луч преломленный (рис.6). На рисунках 7 и 8 приведены графики, демонстрирующие, насколько данные, полученные при преломлении луча лазера на торцевых гранях листа из оргстекла размером 35×40 см, соответствуют законам Птолемея и Снеллиуса. За счет значительных расстояний, которые луч проходит внутри оргстекла, удается существенно снизить ошибку измерения угла преломления γ. По этим графикам можно утверждать, что начиная с $\alpha = 45^\circ$ наблюдается отклонение от закона Птолемея. При меньших углах для отклонения от этого закона требуется проведение измерений углов с точностью выше 1%, что с данным оборудованием невозможно.

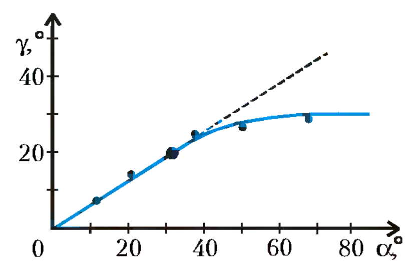


Рис. 7

Если вы пришли к выводу, что закон Снеллиуса более соответствует экспериментальной зависимости, то из графиков на рисунках 5 и 8 логично получить коэффициенты преломления n воды (или другой жидкости, заполняющей бутылку) и оргстекла. Проведение прямых, прохо-

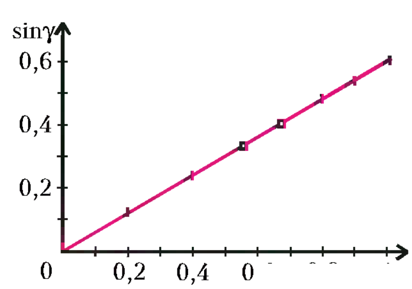


Рис. 8

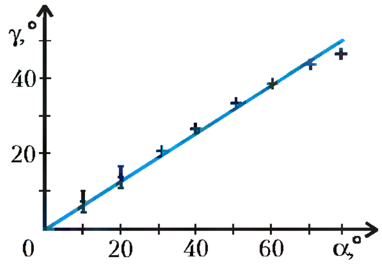


Рис. 9

дящих через все точки с наибольшим и наименьшим наклоном, дает возможность оценить ошибку полученного значения n. У нас получилось $n = 1,31 \pm 0,02$ для воды в бутылке и $n = 1,49 \pm 0,02$ для оргстекла. А у вас?

Теперь попробуем ответить на вопрос исследования: почему ошибался Птолемей? Птолемей измерил углы α и γ в 10 точках интервала $0 - 90°$ через каждые 10°. Построим теоретическую зависимость α от γ, считая известным коэффициент преломления воды n = 1,33 (рис.9). «Позволим» Птолемею ошибаться в измерении углов на 1 градус ($\pm 1°$). При такой ошибке все точки, кроме углов $\alpha = 70°$ и $\alpha = 80°$, ложатся на прямую. А теперь вспомним, как Птолемей измерял угол γ. Попробуйте сами опустить в воду линейку так, чтобы угол между ней и поверхностью воды составил 70 – 80° (что соответствует птолемеевским углам $\alpha = 10 - 20°$). «Излом» линейки, хорошо видный при больших углах, почти неразличим при малых. Поэтому скорее всего ошибка в измерении γ при малых α может быть увеличена до $\pm 3°$. В таком случае все точки, кроме $\alpha = 80°$, ложатся на прямую. Анализ дошедшей до нас оригинальной таблицы результатов Птолемея подтверждает, что точка $\alpha = 80°$ действительно выпадает из линейной зависимости $\gamma = k\alpha$. Однако позволим великому естествоиспытателю самому решать, как интерпретировать зависимость, на которой девять точек из десяти ложатся на экспериментальную прямую, а одна «выпадает» из нее.

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

«Утро туманное...»

Глядя на туманную толщу, зададим себе вопрос: какие физические факторы удерживают туман над поверхностью земли?

Хотя большинство частиц тумана имеют диаметр порядка 10 мкм (есть меньше, есть и больше), плотность воды в них обычная: $\rho = 10^3$ кг/м^3; следовательно, архимедова сила тут ни при чем. Ветер похоже тоже ни при чем, так как его скорость может иметь вертикальную составляющую, направленную и вверх и вниз, а также нулевую. А может, туманные капельки совершают в воздухе броуновское движение и оттого не падают? Тоже нет, поскольку наибольший диаметр броуновской частицы примерно 1 мкм и, значит, удары молекул воздуха о парящие капли воды для них нечувствительны. Если подумать, что капельки очень медленно падают в воздухе, испытывая его сопротивление, то вычисления не подтвердят эту мысль. Физически несложный расчет, связанный с вязкостью воздуха (а потому выходящий за школьные рамки), дает, что десятиметровый слой тумана осел бы почти весь за 56 минут – а этого не наблюдается.

Предположим теперь, что микрокапельки воды наэлектризовались положительно в процессе образования тумана и находятся в равновесии в двух вертикальных противонаправленных полях: в поле тяжести с напряженностью $g = 9,8$ м/с^2 и в электрическом поле Земли с напряженностью E = 130 В/м. Очевидно, что условие равновесия можно записать в виде $mg = qE$, где m и q – масса и заряд капельки соответственно. Капля не должна быть разорвана электрическими силами. В качестве простого условия ее стабильности разумно потребовать, чтобы электрическая энергия капли не превосходила ее поверхностную энергию, т.е.

$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \le 4\pi R^2 \sigma,$$

где R – радиус капли, $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ Н/м – коэффициент поверхностного натяжения воды, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная. Из полученных соотношений (учитывая, что $m = 4\pi R^3 \rho/3$) находим диаметр капли:

$$d = 2R \le 2\sqrt[3]{18\varepsilon_0 \sigma \left(\frac{E}{g\rho}\right)^2} \approx 25 \text{ мкм}.$$

Результат явно подтверждает наше предположение.

«Вошел: и пробка в потолок...»

Несомненно, по случаю ли Нового Года или по другому приятному поводу вам доводилось наблюдать такое физическое явление: из бутылки вместе с брызгами шампанского вылетает пробка и ударяет в потолок. Но вот потолок как раз и мешает установить, на какую высоту h она могла бы подняться. Можно, конечно, экспериментировать на открытом воздухе, но все равно высоту подъема пробки пришлось бы прикидывать «на глазок». Поэтому проведем оценочный расчет.

Сначала выполним измерения: масса пробки m = 8 г; внутренний диаметр «ствола» бутылки равен 18 мм, значит, площадь его сечения S = 254 мм^2; глубина погружения пробки l = 24 мм.

Часто сразу после снятия проволочной уздечки пробка несколько секунд остается неподвижной. Это означает, что сила давления газов и максимальная сила трения пробки о ствол примерно равны. Так как сила трения линейно убывает по мере выхода пробки из бутылки (покажите это), работу действующей на пробку силы можно записать в виде $A = pSl/2$, где p – давление в бутылке. А вот силой сопротивления воздуха пренебрегаем: ее учет, хотя и не создает проблемы, все же сильно утяжелит рассказ о вылетающей пробке.

В популярной энциклопедии «Алкогольные напитки» говорится, что «бутылка должна выдерживать в течение минуты давление 17 атмосфер». Примем запас прочности, страхующий бутылку от разрыва, пятикратным. Отсюда находим давление внутри бутылки: $p = 3,4 \cdot 10^5$ Па.

Пусть «ствол» бутылки направлен вертикально вверх. Тогда имеем очевидное соотношение

$$mgh \sim \frac{pSl}{2}, \text{ откуда } h \sim \frac{pSl}{2mg} \approx 13 \text{ м}.$$

Заметим, что начальная скорость пробки при этом составляет $v_0 \sim \sqrt{2gh} \approx 16$ м/с ≈ 60 км/ч. Этой средней автомобильной скорости вполне достаточно, чтобы травмировать, например, глаз. Поэтому целиться из бутылки в рядом стоящего не рекомендуется. Пусть уж лучше пробка летит в потолок!

Публикацию подготовил
В.Дроздов

Прямоугольник, вписанный в окружность

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Четырехугольники, вписанные в окружность, хорошо изучены со времен Древней Греции, и о них достаточно много говорено. Поэтому, на первый взгляд, такая их частная разновидность, как вписанный в окружность прямоугольник, едва ли заслуживает серьезного внимания. Тем не менее более пристальное изучение свойств прямоугольника, вписанного в окружность, дарит много находок и неожиданностей, обнаруживает полезные зависимости и закономерности. В результате работы с данной конфигурацией сложилась подборка задач, которую мы выносим на суд читателей.

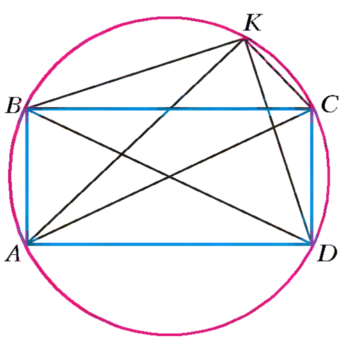


Рис. 1

Задача 1. *Докажите, что для любой точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, сумма* $AK^2+BK^2+CK^2+DK^2$ *есть величина постоянная. Найдите значение этой суммы, если радиус окружности равен R.*

Решение. Из прямоугольных треугольников BKD и AKC (рис.1) видно, что $BK^2+DK^2=BD^2$ и $AK^2+CK^2=AC^2$. Тогда

$$AK^2+BK^2+CK^2+DK^2=BD^2+AC^2=4R^2+4R^2=8R^2.$$

Но R постоянно, а значит, и требуемая сумма постоянна и равна $8R^2$.

Задача 2. *Через вершины вписанного в окружность прямоугольника площади S проведены касательные к этой окружности. Докажите, что образовавшийся четырехугольник – ромб. Докажите также, что площадь ромба не меньше 2S.*

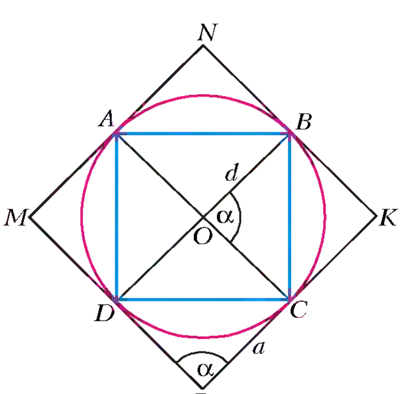


Рис. 2

Решение. Пусть после проведения касательных образовался четырехугольник $MNKP$ (рис.2).

Поскольку $MN \parallel KP$ ($MN \perp AC$ и $KP \perp AC$) и $MP \parallel KN$ ($MP \perp BD$ и $KN \perp BD$), то $MNKP$ – параллелограмм. Но параллелограмм с равными высотами ($AC = BD = 2R = d$) является ромбом.

Пусть сторона ромба $MN = a$ и $AC = BD = d$. Очевидно, что $a \ge d$. Тогда и $a^2 \sin\alpha \ge d^2 \sin\alpha$ ($\angle BOC = \angle MPK = \alpha$), или $S_{\text{ромба}} \ge 2S_{\text{прям}}$, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Биссектрисы углов A и C вписанного прямоугольника ABCD пересекают окружность в точках E и F соответственно, O – центр окружности. Докажите, что точки E, O, F лежат на одной прямой (рис.3).*

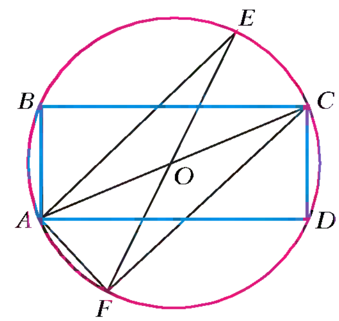


Рис. 3

Решение. Заметим, что $\angle FAD = \angle FCD = 45^\circ$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу), $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, а это значит, что EF– диаметр, т.е. EF содержит точку O.

Задача 4. *Из точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, опустили перпендикуляры KM и KN на диагонали BD и AC соответственно. Докажите, что величина угла MKN, а также длина отрезка MN не зависят от положения точки K.*

Решение. Заметим, что $\alpha = 180^\circ - \beta$ (рис.4), но величина β не меняется, а значит, и $\alpha = \text{const}$. Далее, OK– диаметр окружности, описанной около четырехугольника $KMON$. Тогда по теореме синусов для треугольника KMN получаем $m = OK \sin\alpha$. Но OK – радиус большой окружности – величина постоянная. Поскольку и $\alpha = \text{const}$, то тем самым доказано постоянство отрезка m.

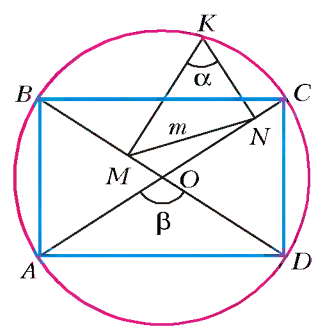


Рис. 4

Задача 5. *Из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, который имеет а) наибольшую площадь; б) наибольший периметр.*

Решение. Пусть S – площадь прямоугольника.

а) $S = \frac{1}{2}d^2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}d^2$ (так как $\sin\alpha \le 1$) (рис.5), а равенство достигается, когда $\sin\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 90^\circ$. Значит, искомый прямоугольник – квадрат.

б) Из неравенства $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратичное не меньше среднего арифметического) имеем $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} = 2R\sqrt{2}$ (см. рис.5), где $a + b$ – полупериметр прямоугольника $ABCD$. Знак равенства достигается при $a = b$. Следовательно, наибольший периметр также имеет квадрат.

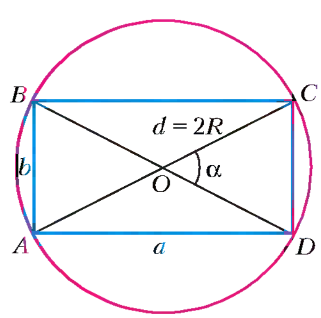


Рис. 5

Задача 6. *Восстановите вписанный в данную окружность прямоугольник по двум точкам M и N, принадлежащим смежным сторонам прямоугольника.*

Решение. Построим окружность с диаметром MN (рис.6). Пусть A – одна из точек пересечения построенной и данной окружностей. Тогда прямые AN и AM при пересечении с данной окружностью дадут, соответственно, точки B и D. Дальнейшее построение очевидно.

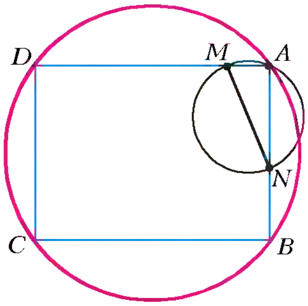


Рис. 6

Задача 7. *Прямоугольник ABCD вписан в окружность, N – произвольная точка на меньшей дуге BC, точки K, T, E – основания перпендикуляров, опущенных из точки N на BD, AC, BC соответственно. Докажите, что точка E является точкой пересечения биссектрис (инцентром) в треугольнике NKT.*

Решение. Идея доказательства базируется на таком известном факте геометрии треугольника: $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$, где I – инцентр треугольника ABC (рис.7).

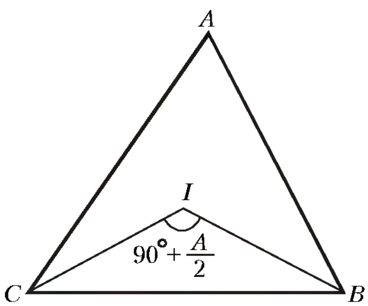


Рис. 7

Около $BNEK$ (рис.8) можно описать окружность ($\angle BEN = \angle BKN = 90^\circ$), тогда $\angle 1 = \angle 3$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Аналогично, около $NCTE$ можно описать окружность, тогда $\angle 2 = \angle 4$. Но $\angle 3 = \angle 4$ ($BO = CO$ и $\triangle BOC$ – равнобедренный), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Пусть $\angle KNT = \angle 1 + \angle 2 = \alpha$, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{\alpha}{2}$. Докажем, что $\angle KET = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Поскольку при этом NE является биссектрисой в треугольнике KNT, то это и будет означать, что E – инцентр $\triangle KNT$.

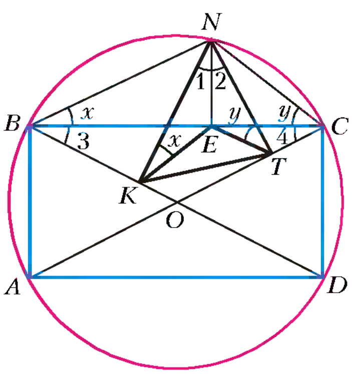


Рис. 8

Обозначим $\angle NCE = \angle NTE = y$ (так как $NCTE$ – вписанный четырехугольник). Аналогично, $\angle NBE = \angle NKE = x$ ($NBKE$ – вписанный четырехугольник), $\angle KEN = 180^\circ - (\angle 1 + x)$, $\angle TEN = 180^\circ - (\angle 2 + y)$. Тогда

$$\angle KET = 360^\circ - (\angle KEN + \angle TEN) = x + y + \alpha .$$

Но $x + y = \frac{1}{2} \cup BNC = \frac{1}{2} \angle BOC$. Поскольку $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$ (из треугольника BOC), то $x + y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle KET = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. А это значит, что точка E – инцентр треугольника KNT.

Задача 8. *Пусть K – произвольная точка меньшей дуги AD описанной около прямоугольника ABCD окружности (рис.9), K_1, K_2, K_3, K_4 – ее проекции на прямые AD, AB, CD, BC соответственно. Докажите, что K_1 – точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника $K_2K_3K_4$.*

Решение. Проведем прямую K_1K_2. Если мы докажем, что $\angle K_2TK_3 = x = 90^\circ$, то задача будет решена. Ясно, что $\angle 1 = \angle 2$ (AK_1KK_2 – вписанный четырехугольник), $\angle 2 = \angle 3$ (вписанные, опираются на одну дугу). Тогда $\angle 1 = \angle 3$. Поскольку $KO = K_3O$ – половины диагоналей прямоугольника KK_4CK_3, то $\angle 4 = \angle 5$. Но $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ (из $\triangle KCK_3$). Тогда и $\angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$. Значит, в $\triangle K_2TK_3$ $x = 90^\circ$ и K_2T – высота, т.е. K_1 – ортоцентр $\triangle K_2K_3K_4$.

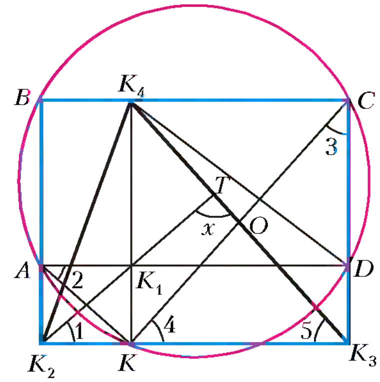


Рис. 9

Задача 9 (обобщение задачи 8). *Через произвольную точку K меньшей дуги AD проведена произвольная прямая, которая пересекает прямые AB и CD в точках K_2 и K_3 соответственно (рис.10). Через точку K проведена прямая перпендикулярно K_2K_3, которая пересекает AD и BC в точках K_1 и K_4 соответственно. Докажите, что K_1 – ортоцентр в треугольнике $K_2K_3K_4$.*

Решение. Докажем, что $\angle K_2TK_3 = x = 90^\circ$. Имеем $\angle 1 = \angle 2$ (AK_1KK_2 – вписанный четырехугольник), $\angle 2 = \angle 3$ (вписанные, опираются на одну дугу). Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. Около KK_3CK_4 можно описать окружность, и тогда $\angle 4 = \angle 5$.

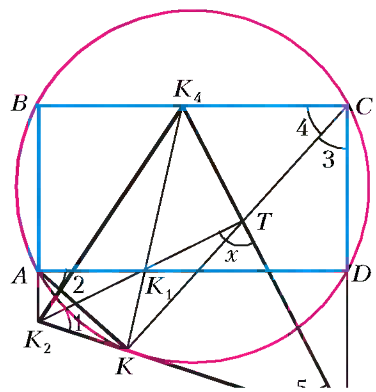


Рис. 10

Но $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, а значит, $\angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$. Тогда $x = 90^\circ$, и K_2K_1 – прямая, содержащая высоту, т.е. K_1 – ортоцентр.

Задача 10. *Дана точка A, две взаимно перпендикулярные прямые n и k, содержащие вершины B и D прямоугольника ABCD. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников ABCD.*

Решение. Пусть данные прямые n и k пересекаются в точке E (рис.11). Тогда точки A, B, C, D, E лежат на одной окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$ ($\angle BED = \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$). Но AC – диаметр, следовательно, $\angle AEC = 90^\circ$. Таким образом, геометрическим местом вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$ будет прямая b, проведенная через точку E перпендикулярно AE.

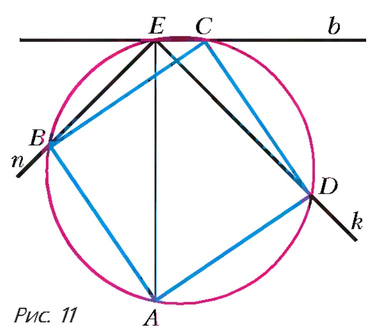


Рис. 11

Под давлением лунного света

А.СТАСЕНКО

Но если свет производит давление, то в темную ночь летать безопаснее, чем при полной Луне?

Из рассуждений одной девочки

Кто же теперь не знает, что свет оказывает давление на освещенные тела. С этим явлением связаны имена замечательных ученых – Максвелла, Лебедева, Комптона. Но если вы станете спрашивать у прохожих, *почему* свет оказывает давление на поверхность, то ответы могут быть разными.

Школьный Хорошист, например, скажет, что свет состоит из частиц – фотонов, этаких маленьких, очень легких шариков массой m, движущихся со скоростью c, и при абсолютно упругом ударе о (зеркальную) поверхность каждый из них передаст импульс $mc-(-mc)=2mc$. А если вам повезет и встретится школьный Отличник, то он скажет, что свет – это ведь, с другой стороны, электромагнитная волна, а она поперечна в том смысле, что векторы ее импульса $\vec{p}$, электрического поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и составляют правую тройку, как оси декартовой системы координат x, y, z, так что им можно приписать соответствующие индексы: $\vec{p}_x$, $\vec{E}_y$, $\vec{B}_z$ (рис. 1). А раз так, то, падая на проводник, электрическое поле вызовет в нем ток I_y, а он (будучи, по определению, потоком положительных зарядов, движущихся со скоростью v_y) испытает в магнитном поле той же волны силу Лоренца $\vec{F}_x$, направленную вдоль оси x, т.е. в направлении движения самой волны.

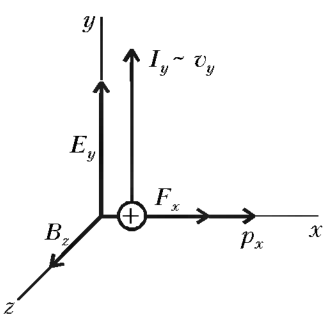


Рис. 1

Отличник, возможно, добавит еще, что, если уж говорить об импульсе и массе фотона, то они равны $h\nu/c$ и $h\nu/c^2$ соответственно.

Если же вам повезет еще больше и встретится Студент Московского физико-технического института (МФТИ) или Московского государственного университета (МГУ), то он расскажет нечто о векторном произведении $\vec{E}$ на $\vec{B}$, о плотности потока энергии Умова – Пойнтинга, о ... Но нам будет достаточно школьного Отличника.

Теперь, обладая такой богатой информацией, можно сделать и численные оценки. Пусть плотность потока энергии волны, а это и есть вектор Умова – Пойнтинга, равна q (если вы не знаете или забыли, что такое плотность потока энергии, достаточно посмотреть на ее размерность: $\text{Дж}/(\text{м}^2\cdot\text{с})$). Поскольку импульс каждого фотона равен $h\nu/c$, то плотность потока импульса волны, т.е. всех фотонов, равна q/c (размерность этой величины: $\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}/(\text{м}^2\cdot\text{с})}{\text{м/с}}=\dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}=\text{Па}$), а в случае зеркального отражения

$$p_x=2\frac{q}{c}.$$

Известно, что на расстоянии $r_\text{С}$ от Солнца величина плотности потока энергии (так называемая солнечная постоянная) равна $q=1400\ \text{Вт/м}^2$. В частности, это значит, что, сфокусировав такой поток энергии при отражении от зеркала площадью 1 м^2 на сковороде, можно успешно приготовить яичницу или зажарить курицу. Но нам нужен поток импульса, т.е. сила на единицу площади (а это ведь есть давление!):

$$p_x=\frac{2q}{c}=\frac{2\cdot1400\ \text{Вт/м}^2}{3\cdot10^8\ \text{м/с}}\sim10^{-5}\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}=\frac{F_x}{S}.$$

Чтобы получить, например, силу 10 Н, нужна площадь $S=10^6\ \text{м}^2=1\ \text{км}^2$. Ясно, что такая сила не свалит с ног, но возможности космического полета при помощи солнечного паруса уже серьезно исследовались учеными. А на тяжелый авиалайнер с несущей площадью $s=500\ \text{м}^2$ действует сила давления солнечного излучения $F_\text{С}=0{,}005\ \text{Н}$.

Но что же Луна? Можно оценить сверху и силу давления лунного света. Если радиус Луны равен $R_\text{Л}$, то ее диск перехватывает долю солнечного излучения, равную $(q\pi R_\text{Л}^2)/(4\pi r_\text{С}^2)$ (рис.2). Конечно, часть этой энергии поглощается, но, если мы желаем получить оценку *сверху* (выше которой уже быть не может), предположим, что вся эта энергия отражается. Но как? Ясно, что не зеркально, – иначе Луна выглядела бы, как блестящий елочный шарик с характерным бликом. А ведь она представляется нам плоским диском – это случай так называемого *диффузного* отражения.

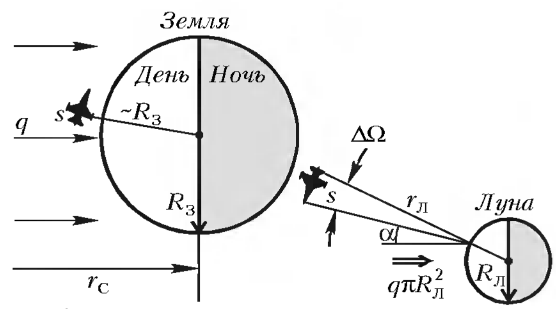


Рис. 2

При этом мощность, уходящая с элементарной кольцевой полоски АВ площадью

$$ds_\theta=2\pi R_Л\sin\theta\cdot R_Л d\theta$$

(рис. 3) в телесный угол $d\Omega$ под углом θ к нормали, равна

$$dW=Bds_\theta\cos\theta\cdot d\Omega.$$

Это так называемый закон Ламберта, в котором коэффициент пропорциональности B называется яркостью (Brightness) и, как легко

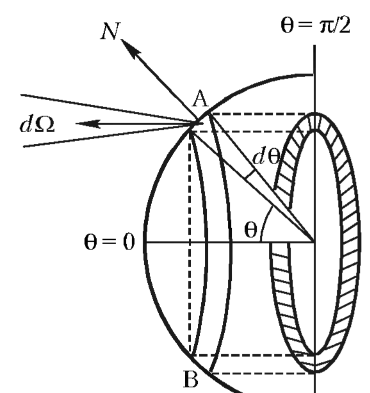


Рис. 3

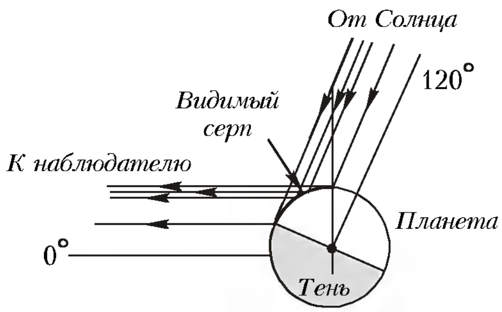
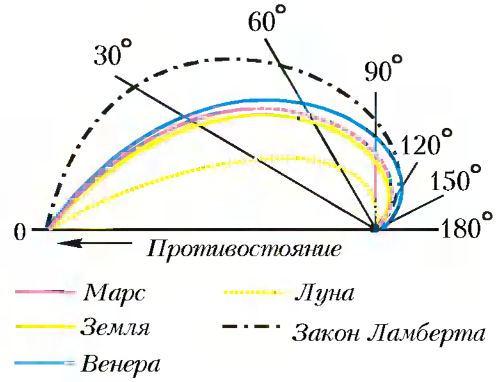


Рис. 4



видеть, имеет размерность $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{стер})$ (стер – единица телесного угла). Из этого закона видно еще, что $ds_\theta\cos\theta$ есть площадь проекции кольцевой площадки AB на диаметральную плоскость (она заштрихована на рисунке 3).

Интересно сравнить угловые зависимости – индикатрисы – отражения для различных планет с теми, которые следуют из закона Ламберта. Из рисунка 4 видно, что Марс, Земля и Венера отражают солнечный свет приблизительно одинаково, но, конечно, хуже, чем матовая поверхность по Ламберту. Обратим внимание на участок индикатрисы для Венеры, выходящий за пределы ламбертовского рассеяния. Видно, что при скользящих углах падения солнечного света $\gtrsim 120^\circ$ отражение становится частично зеркальным (при этом должен появляться блик, хотя и очень слабый). А вот Луна – ночное светило – оказывается темнее других: ее среднее альбедо (отражающая способность) равно $\rho = 0{,}073$, т.е. Луна отражает приблизительно $1/14$ долю падающего излучения с плотностью потока q.

В качестве приближенной оценки примем, что доля ρ падающего излучения отражается равномерно в телесный полуугол 2π. Тогда для яркости получим величину порядка $B = \rho q/(2\pi)$. Теперь, чтобы узнать, какая сила давит на тот же авиалайнер в полнолуние, надо найти угол, под которым его площадь видна с Луны (см. рис.2):

$$\Delta\Omega = \frac{s}{r_\text{Л}^2}.$$

Наибольшее значение косинуса угла α равно, конечно, единице (когда Луна стоит в зените над самолетом). Заметим, что рисунок 2 сделан не в масштабе, так что в реальности угол α может быть очень малым.

Итак, согласно закону Ламберта, сила давления лунного света на ночной лайнер будет равна

$$F_\text{Л} = \frac{\rho q R_\text{Л}^2 s}{c r_\text{Л}^2} = F_\text{С}\rho\left(\frac{R_\text{Л}}{r_\text{Л}}\right)^2.$$

Отношение геометрических величин можно выразить через значение угла, под которым радиус Луны виден с Земли:

$$\frac{R_\text{Л}}{r_\text{Л}} = \frac{D_\text{Л}}{2r_\text{Л}} = \frac{\alpha_\text{Л}}{2} \approx \frac{0{,}5^\circ}{2} \approx 5\cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

Таким образом, искомая сила еще порядков на пять $(25\cdot 10^{-6})$ меньше, чем сила давления Солнца в зените:

$$F_\text{Л} = F_\text{С}\,\rho\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5} = 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}073\cdot 2{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{Н} \sim 10^{-8}\ \text{Н}.$$

С чем бы сравнить такую малую силу? С весом самолета

$$G \sim (250-400)\ \text{т}\cdot 10\ \text{м/с}^2 = (2{,}5-4)\cdot 10^6\ \text{Н}?$$

Тогда

$$\frac{F_\text{Л}}{G} \sim 10^{-15}.$$

Смешно.

Давайте лучше сравним с разностью значений его веса ΔG при полете днем и в лунную ночь – ведь днем он ближе к Солнцу, но дальше от Луны, а ночью наоборот. Из рисунка 2 видно, что

$$\frac{G_\text{день} - G_\text{ночь}}{G} = \frac{\Delta G}{G} = \frac{M_\text{Л}}{M_\text{З}}\left(\left(\frac{R_\text{З}}{r_\text{Л}+R_\text{З}}\right)^2 + \left(\frac{R_\text{З}}{r_\text{Л}-R_\text{З}}\right)^2\right) - \frac{M_\text{С}}{M_\text{З}}\left(\left(\frac{R_\text{З}}{r_\text{С}-R_\text{З}}\right)^2 + \left(\frac{R_\text{З}}{r_\text{С}+R_\text{З}}\right)^2\right).$$

Заметим, что здесь пренебрегается высотой полета в сравнении с астрономическими масштабами, а $r_\text{Л}$ и $r_\text{С}$ – расстояния между центрами небесных тел.

Выпишем нужные данные:

$$\frac{M_\text{Л}}{M_\text{З}} = \frac{7{,}36\cdot 10^{22}\ \text{кг}}{6\cdot 10^{24}\ \text{кг}} = 1{,}2\cdot 10^{-2},\quad \frac{M_\text{С}}{M_\text{З}} = \frac{2\cdot 10^{30}\ \text{кг}}{6\cdot 10^{24}\ \text{кг}} = \frac{10^6}{3},$$

$$\frac{r_\text{Л}}{R_\text{З}} = \frac{384000\ \text{км}}{6{,}4\cdot 10^3\ \text{км}} = 60,\quad \frac{r_\text{С}}{R_\text{З}} = \frac{150\cdot 10^6\ \text{км}}{6{,}4\cdot 10^3\ \text{км}} = 2{,}3\cdot 10^4$$

и получим

$$\frac{\Delta G}{G} = 1{,}2\cdot 10^{-2}\left(\left(\frac{1}{1+60}\right)^2 + \left(\frac{1}{(60-1)}\right)^2\right) - \frac{10^6}{3}\left(\left(\frac{1}{2{,}3\cdot 10^4 - 1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2{,}3\cdot 10^4 + 1}\right)^2\right) \sim -10^{-3}.$$

Итак, даже разность значений веса самолета под Солнцем днем и под Луной ночью, связанная с гравитацией, во много больше, чем сила давления лунного света. Поэтому летайте спокойно и темной ночью, и в полнолуние. И даже днем, когда само Солнце, казалось бы, позволяет авиакомпании взять на борт на несколько пассажиров больше, чем ночью (если бы при этом не изменялась и плотность атмосферы, от которой зависят и подъемная сила, и сила сопротивления, и, следовательно, потребная мощность двигателей, и... но это отдельный разговор).

Цепочка тетраэдров

В.ЗАЛГАЛЛЕР

Рассмотрим правильный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Отразив его вершину A_1 относительно плоскости $A_2A_3A_4$, получим точку A_5. Отразив точку A_2 относительно плоскости $A_3A_4A_5$, получим точку A_6. Вообще, получив очередной тетраэдр $A_nA_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ и отразив точку A_n относительно плоскости $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, получим точку A_{n+4} – вершину очередного тетраэдра $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}A_{n+4}$. К чему приводит эта конструкция? К винтообразной цепочке, изображенной на рисунке 1. Она же – в виде «шашлыка на шампуре» – показана на рисунке 2. А фотография этой цепочки – рисунок 3.

На фотографии видны три винтовые линии. Эти ломаные $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}\ldots$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}\ldots$ и $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}\ldots$ видны и на рисунке 1. А на самом деле эти три линии можно объединить в одну винтовую линию $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots$, вьющуюся вокруг некоторой прямой l.

Существование прямой l легко доказать при помощи теоремы Шаля для пространства, в силу которой любое перемещение пространства – это параллельный перенос, винтовое движение, скользящая или поворотная симметрия.[1] Поскольку тетраэдр $A_2A_3A_4A_5$ ориентирован так же, как и исходный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, то перемещение, которое увеличивает номер точки на единицу, т.е. переводит A_1 в A_2, A_2 в A_3, A_3 в A_4 и, наконец, A_4 в A_5, не может быть ни скользящей симметрией, ни поворотной симметрией (потому что эти преобразования не сохраняют, а меняют ориентацию). Не является оно и параллельным переносом. Значит, это винтовое движение! Применяя его многократно, получаем всю бесконечную цепочку тетраэдров.

Как расположена ось l порождающего бесконечную цепочку правильных тетраэдров винтового движения по отношению к этим тетраэдрам? Чтобы ответить на этот вопрос, найдем точки пересечения P_1 и P_2 оси l винтового движения с треугольниками $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ соответственно. Эти точки можно искать в декартовой системе координат. Но вычисления будут чуть проще, если воспользоваться барицентрическими координатами. Поскольку не все читатели знают, что это такое, дадим определение, сформулируем и докажем лемму и теорему, а после этого вернемся к точкам P_1 и P_2.

Определение. *Если P – точка плоскости ABC, то ее барицентрическими координатами относительно треугольника ABC называют числа* $x = S_{PBC}/S_{ABC}$, $y = S_{PCA}/S_{ABC}$ *и* $z = S_{PAB}/S_{ABC}$. (При этом, например, S_{PBC} – это площадь треугольника PBC, если точки P и A лежат по одну сторону от прямой BC, и взятая со знаком минус

[1] *Подробно об этом можно прочитать в книгах «Элементарная геометрия, ч.2 (стереометрия)» Ж.Адамара, «Введение в геометрию» Г.С.Коксетера, «Геометрические преобразования» П.С.Моденова и А.С.Пархоменко. (Прим. ред.)*

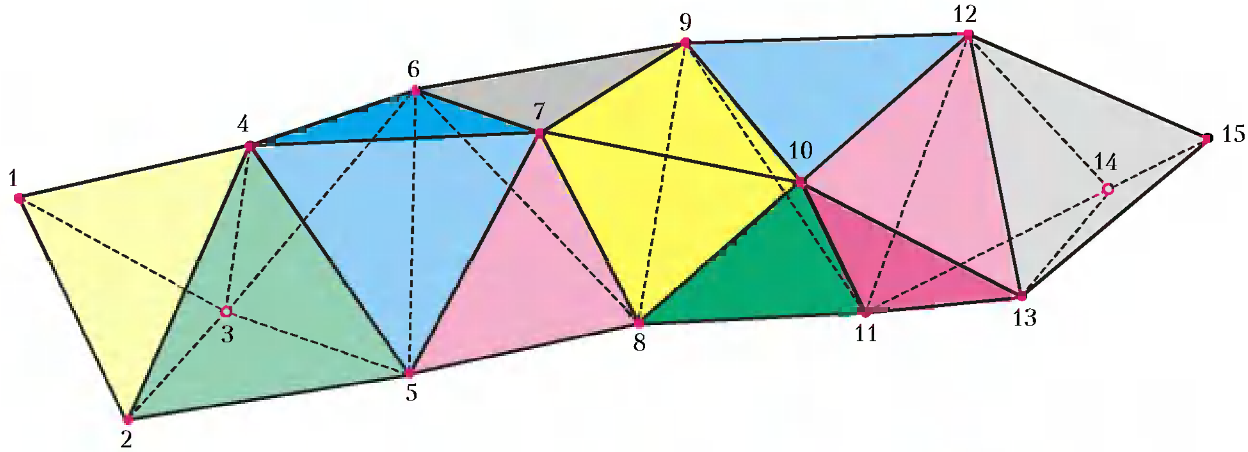


Рис. 1

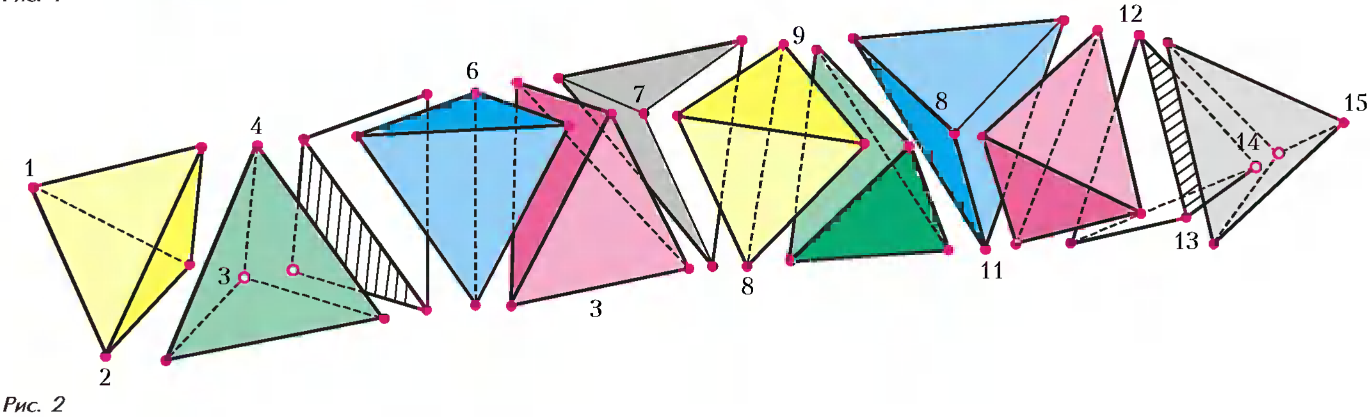


Рис. 2

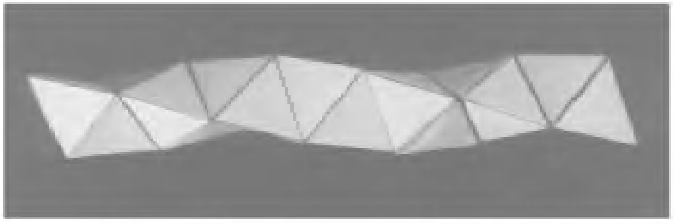


Рис. 3

площадь этого же треугольника, если точки P и A лежат по разные стороны от BC.)

Лемма. *Если точка P прямой AB обладает тем свойством, что $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, то для любой точки O имеем*

$$\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Доказательство.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) =$$

$$= (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

Теорема. *Если $(x;\ y;\ z)$ – барицентрические координаты точки P плоскости ABC относительно треугольника ABC, то*

$$x + y + z = 1$$

и для любой точки O пространства

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Доказательство. Во-первых,

$$x + y + z =$$

$$= \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{PBC} + S_{PCA} + S_{PAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

Во-вторых, обозначив буквой K точку пересечения прямой CP с прямой AB (случай параллельности прямых CP и AB легко разобрать отдельно), имеем

$$\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = y : x$$

(случай $x = 0$ рассмотрите отдельно), так что в силу леммы

$$\overrightarrow{OK} = \frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}$$

(случай $x + y = 0$ соответствует уже выделенной нами ситуации $CP \parallel AB$). Поскольку

$$\overrightarrow{CP} = \frac{S_{CAPB}}{S_{ABC}}\overrightarrow{CK} = (x+y)\overrightarrow{CK},$$

то в силу леммы

$$\overrightarrow{OP} = (1-x-y)\overrightarrow{OC} + (x+y)\overrightarrow{OK} = z\overrightarrow{OC} +$$

$$+ (x+y)\left(\frac{x}{x+y}\overrightarrow{OA} + \frac{y}{x+y}\overrightarrow{OB}\right) = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}.$$

Теперь мы готовы заняться вычислением барицентрических координат $(x;\ y;\ z)$ точек P_1, P_2 и P_3 относительно треугольников $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$ и $A_3A_4A_5$ соответственно. (Заметьте: поскольку при винтовом вращении точки P_1, A_1, A_2 и A_3 переходят в точки P_2, A_2, A_3 и A_4 соответственно, а при повторном винтовом движении – в точки P_3, A_3, A_4 и A_5, то мы не ошиблись, выписав только один набор барицентрических координат, а не три.) По теореме имеем

$$\overrightarrow{A_1P_1} = y\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_1A_3},$$

$$\overrightarrow{A_1P_2} = x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4},$$

$$\overrightarrow{A_1P_3} = x\overrightarrow{A_1A_3} + y\overrightarrow{A_1A_4} + z\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2P_3}$, то

$$x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4} - \left(y\overrightarrow{A_1A_2} + z\overrightarrow{A_1A_3}\right) =$$

$$= x\overrightarrow{A_1A_3} + y\overrightarrow{A_1A_4} + z\overrightarrow{A_1A_5} - \left(x\overrightarrow{A_1A_2} + y\overrightarrow{A_1A_3} + z\overrightarrow{A_1A_4}\right),$$

откуда

$$(2x-y)\overrightarrow{A_1A_2} + (2y-z-x)\overrightarrow{A_1A_3} + (2z-y)\overrightarrow{A_1A_4} = z\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Так как

$$\overrightarrow{A_1A_5} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4}\right),$$

то

$$\begin{cases} 2x - y = \dfrac{2}{3}z, \\ 2y - z - x = \dfrac{2}{3}z, \\ 2z - y = \dfrac{2}{3}z. \end{cases}$$

Добавляя к этим уравнениям известное нам равенство

$$x + y + z = 1,$$

получаем систему из четырех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее, находим ответ: $x = 0{,}3$, $y = 0{,}4$ и $z = 0{,}3$.

Вернемся к нашей оси l. Прямая l равноудалена от точек A_1, A_2, A_3,... На какое расстояние? Конечно, если не знать длину ребра исходного правильного тетраэдра, то ответить на этот вопрос невозможно. Пусть для определенности $A_1A_2 = 1$. Обозначим для краткости $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \vec{c}$. Тогда

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1,$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}.$$

Для любой точки M прямой P_1P_2 существует такое число t, что

$$\overrightarrow{P_1M} = t\overrightarrow{P_1P_2}.$$

В силу леммы

$$\overrightarrow{A_1M} = (1-t)\overrightarrow{A_1P_1} + t\overrightarrow{A_1P_2} =$$

$$= (1-t)\left(0{,}4\vec{a} + 0{,}3\vec{b}\right) + t\left(0{,}3\vec{a} + 0{,}4\vec{b} + 0{,}3\vec{c}\right).$$

Следовательно,

$$A_1M^2 = \overrightarrow{A_1M}^2 = \left((0{,}4 - 0{,}1t)\vec{a} + (0{,}3 + 0{,}1t)\vec{b} + 0{,}3t\vec{c}\right)^2 =$$

$$= (0{,}4 - 0{,}1t)^2 + (0{,}3 + 0{,}1t)^2 + 0{,}09t^2 +$$

$$+ (0{,}4 - 0{,}1t)(0{,}3 + 0{,}1t) + (0{,}3 + 0{,}1t)\cdot 0{,}3t + 0{,}3t(0{,}4 - 0{,}1t),$$

откуда

$$100A_1M^2 = (4-t)^2 +$$

$$+ (3+t)^2 + 9t^2 + (4-t)(3+t) + 3t(3+t) + 3t(4-t).$$

Раскрыв скобки, получаем в правой части квадратный трехчлен

$$10t^2 + 20t + 37 = 10(t+1)^2 + 27 \geq 27,$$

причем при $t = -1$ достигается равенство. Таким образом, расстояние от точки A_1 до прямой l – т.е. минимальное значение расстояния A_1M – равно $\sqrt{\dfrac{27}{100}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.

Нелинейные элементы в электрических цепях

В.МОЖАЕВ

НАИБОЛЬШИЕ ТРУДНОСТИ ДЛЯ АБИТУРИЕНТОВ ПРЕДставляют задачи по электричеству, в которых присутствуют нелинейные элементы. К ним относятся такие элементы, у которых вольт-амперная характеристика – зависимость проходящего через них тока I от напряжения на них U – не является прямой, проходящей через начало координат.

Типичным примером нелинейного элемента, который наиболее часто встречается в задачах, является идеальный диод. Когда к нему приложено запирающее напряжение любой величины, но большей нуля, говорят, что диод закрыт и ток через него не идет. В этом случае сопротивление диода бесконечно велико – ситуация эквивалентна разрыву цепи. В прямом направлении сопротивление диода равно нулю, и он не оказывает никакого влияния на протекающий через него ток.

К нелинейным элементам относятся также резисторы, у которых сопротивление зависит от величины протекающего через них тока. Например, спираль лампочки накаливания: по мере увеличения тока, протекающего через спираль, растет ее температура, а вместе с ней растет и сопротивление. Нелинейными элементами являются и устройства, в которых происходит газовый разряд, например газонаполненные трубки, тиратроны и другие радиотехнические устройства.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных электрических цепей, в которых присутствуют нелинейные элементы.

Задача 1. *На рисунке 1 показана вольт-амперная характеристика некоторого нелинейного элемента. До напряжения $U_0 = 100$ В ток через элемент отсутствует, а затем линейно растет с напряжением. При подключении такого элемента к батарее с постоянной ЭДС и внутренним сопротивлением r = 25 кОм через элемент течет ток $I_1 = 2$ мА, а при подключении его к той же батарее через балластный резистор с сопротивлением $R = r$ течет ток $I_2 = 1$ мА. Определите ЭДС батареи.*

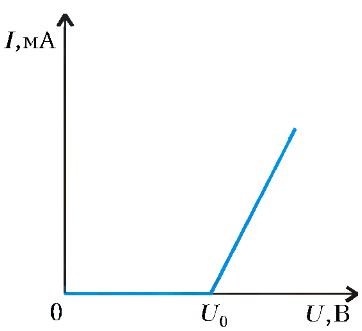


Рис. 1

Выразим в аналитическом виде приведенную на рисунке 1 зависимость тока от напряжения: при $0 < U < U_0$ $I = 0$, а при $U > U_0$ $I = \alpha(U - U_0)$, где $\alpha = \Delta I/\Delta U$ – постоянная величина для данной прямой.

Запишем закон Ома для замкнутой цепи, когда нелинейный элемент подключен непосредственно к батарее:

$$\mathcal{E} = I_1 r + \frac{I_1}{\alpha} + U_0 ,$$

где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. Аналогичное уравнение для второго подключения будет иметь вид

$$\mathcal{E} = 2I_2 r + \frac{I_2}{\alpha} + U_0 .$$

Решая систему этих двух уравнений относительно $\mathcal{E}$, получим

$$\mathcal{E} = U_0 + \frac{I_1 I_2 r}{I_1 - I_2} = 150 \text{ В} .$$

Задача 2. *В одно из плеч моста (рис.2) включено нелинейное сопротивление X, для которого зависимость силы тока I от приложенного напряжения U_X задается формулой $I_X = \alpha U_X^3$, где $\alpha = 0,25$ А/В^3. Найдите мощность, расходуемую в нелинейном проводнике в условиях, когда ток через гальванометр Г отсутствует. Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом и $R_3 = 1$ Ом.*

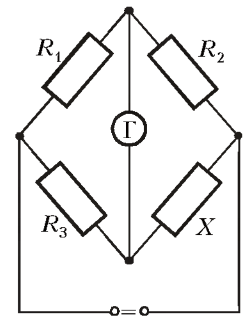


Рис. 2

Обозначим ЭДС источника, подключенного к мосту, через $\mathcal{E}$. Очевидно, что падение напряжения U_2 на резисторе сопротивлением R_2 равно

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2} .$$

Поскольку мост сбалансирован (ток через гальванометр не течет), напряжение на нелинейном резисторе X равно падению напряжения на сопротивлении R_2:

$$U_X = U_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2} ,$$

а падение напряжения на сопротивлении R_3 равно падению напряжения на сопротивлении R_1:

$$U_3 = U_1 = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2} .$$

Ток I_X через нижнюю ветвь моста равен

$$I_X = \frac{U_3}{R_3} = \frac{\mathcal{E} R_1}{(R_1 + R_2) R_3} .$$

Используя связь между током I_X и напряжением U_X на нелинейном сопротивлении:

$$\frac{\mathcal{E} R_1}{(R_1 + R_2) R_3} = \alpha \frac{\mathcal{E}^3 R_2^3}{(R_1 + R_2)^3} ,$$

найдем ЭДС источника:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{R_1 (R_1 + R_2)^2}{\alpha R_2^3 R_3}} .$$

Мощность, выделяемая в нелинейном проводнике, равна

$$P_X = I_X U_X = \alpha U_X^4 = \alpha \left(\frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2} \right)^4 .$$

Подставляя в это соотношение выражение для $\mathcal{E}$, окончательно получим

$$P_X = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_1}{R_2R_3}\right)^2 = 1\ \text{Вт}.$$

Задача 3. *В схеме, изображенной на рисунке 3, конденсатор емкостью C = 100 мкФ, заряженный до напряжения U_0 = 5 В, подключен через диод D к резистору сопротивлением R = 100 Ом. Вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке 4. В начальный момент ключ K разомкнут. Ключ замыкают. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи равен 10 мА? Какое количество теплоты выделится на диоде после замыкания ключа?*

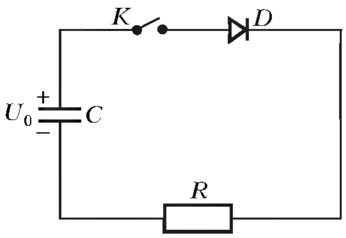


Рис. 3

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается неизменным по величине и по знаку. Предположим, что начальный ток I_0 в цепи больше 10 мА. Закон Ома для нашей замкнутой цепи в этот момент имеет вид

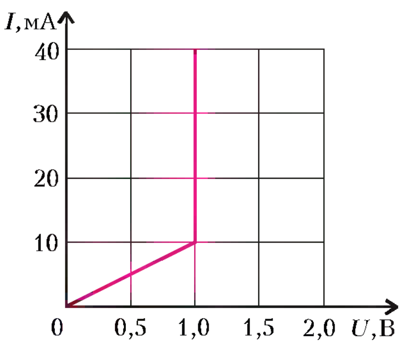


Рис. 4

$$U_0 = U_п + I_0R,$$

где $U_п$ – пороговое напряжение диода ($U_п = 1$ В). Подставляя числовые значения, получим

$$I_0 = \frac{U_0 - U_п}{R} = 40\ \text{мА}.$$

Поскольку полученное значение тока больше 10 мА, наше предположение верно.

После замыкания ключа конденсатор будет разряжаться, а ток в цепи будет уменьшаться. Когда ток станет равным $I_1 = 10$ мА, из закона Ома найдем напряжение U_C на конденсаторе:

$$U_C = U_п + I_1R = 2\ \text{В}.$$

От момента замыкания ключа и до полной разрядки конденсатора диод будет находиться в двух режимах: когда ток в цепи изменяется от $I_0 = 40$ мА до $I_1 = 10$ мА и когда ток изменяется от $I_1 = 10$ мА до нуля. В первом режиме напряжение на диоде будет оставаться постоянным и равным $U_п = 1$ В, а напряжение на конденсаторе будет падать от $U_0 = 5$ В до $U_C = 2$ В. За это время через диод пройдет заряд

$$q = C(U_0 - U_C) = 3\cdot10^{-4}\ \text{Кл},$$

и выделившееся на диоде количество теплоты будет равно

$$Q_1 = qU_п = 3\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Во втором режиме диод ведет себя как обычный резистор с сопротивлением $R_д = U_п/I_1 = 100$ Ом. После окончания первого режима напряжение на конденсаторе равно $U_C = 2$ В, а оставшаяся энергия электрического поля конденсатора составляет

$$W = \frac{CU_C^2}{2} = 2\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Поскольку сопротивление диода $R_д$ равно сопротивлению резистора R, эта энергия разделится поровну между диодом и резистором. Следовательно, на диоде во втором режиме выделится количество теплоты

$$Q_2 = \frac{W}{2} = 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Тогда полное количество теплоты, которое выделится на диоде после замыкания ключа, будет равно

$$Q_д = Q_1 + Q_2 = 4\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Задача 4. *При каких сопротивлениях резистора R в цепи на рисунке 5 в случае размыкания рубильника K может возникнуть дуговой разряд? Известно, что напряжение U на участке дугового разряда связано с током I в цепи соотношением $U = a + b/I$, где a и b – константы, причем $a = 10$ В и $b = 100$ В·А. ЭДС батареи $\mathcal{E}$ = 100 В. Считать, что все сопротивление цепи сосредоточено в резисторе. Какой ток установится в цепи, если R = = 8 Ом?*

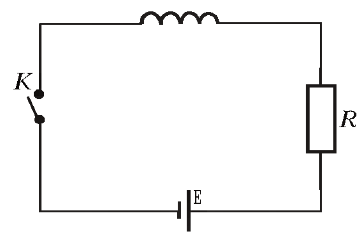


Рис. 5

Сначала несколько слов о включенной в цепь катушке, величина индуктивности которой не задана. Сразу отметим, что дуговой разряд потому и возникает при разрыве цепи с током, что в цепи имеется достаточно большая индуктивность. В момент разрыва цепи индуктивность, благодаря своей инерционности, стремится сохранить в цепи ток, а это приводит к появлению достаточно большой разности потенциалов на воздушном зазоре рубильника, что и вызывает появление дугового разряда. В дальнейшем мы будем рассматривать стационарные режимы, когда при наличии дугового разряда в цепи течет постоянный ток. В этом случае индуктивность не влияет на величину тока в цепи.

Рассмотрим условие возникновения дугового разряда в зависимости от величины сопротивления резистора R. Качественно можно сказать, что дуга будет поддерживаться при малых сопротивлениях резистора, поскольку при больших R на резисторе будет выделяться большое количество теплоты и батарея будет не в состоянии (по энергетическим соображениям) поддерживать дуговой разряд. Пусть в цепи течет ток I, а напряжение на разряде равно U. Закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

$$U = \mathcal{E} - IR.$$

В координатах U и I это уравнение прямой, которую обычно называют нагрузочной прямой. С другой стороны, вольт-амперная характеристика дугового разряда имеет вид гипер-

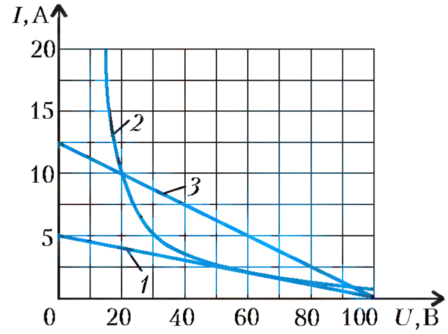


Рис. 6

болы, описываемой уравнением

$$U = a + \frac{b}{I}.$$

Очевидно, что дуговой разряд возникнет при размыкании рубильника в том случае, если нагрузочная прямая будет пересекаться с вольт-амперной характеристикой разряда. Максимальное значение сопротивления R, при котором дуговой разряд еще может возникнуть, соответствует такому случаю, когда нагрузочная прямая касается вольт-амперной характеристики разряда. Такая ситуация изображена на рисунке 6 – нагрузочная прямая *1* касается вольт-амперной характеристики разряда *2*. Для этой нагрузочной прямой при $U = 0$ $I = 5$ А; следовательно, сопротивление резистора $R = \mathsf{E}/I = 20$ Ом. Таким образом, мы получили, что при сопротивлениях $R \le 20$ Ом возникает дуговой разряд.

Разобранный графический способ решения обладает определенной погрешностью, поэтому для более точного определения верхней границы сопротивлений проведем аналитический расчет. Полагая, что дуговой разряд возник, запишем закон Ома для нашей цепи:

$$\mathsf{E} = IR + a + \frac{b}{I}.$$

После приведения к общему знаменателю и подстановки числовых значений получим квадратное уравнение для тока:

$$RI^2 - 90I + b = 0,$$

откуда

$$I = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 100R}}{R}.$$

Поскольку нас интересует случай, когда мы имеем единственное значение тока в точке касания нагрузочной прямой и вольт-амперной характеристики разряда, то в приведенном решении подкоренное выражение должно быть равно нулю. Отсюда получаем $R = 20{,}25$ Ом. Значит, дуговой разряд в случае размыкания рубильника может возникнуть при сопротивлениях

$$0 \le R \le 20{,}25 \text{ Ом}.$$

Теперь разберем случай, когда сопротивление резистора равно 8 Ом. Нагрузочная прямая для этого случая изображена на рисунке 6 в виде прямой *3*. Как видно из рисунка, прямая *3* пересекает вольт-амперную характеристику разряда в двух точках, т.е. мы имеем два решения. Для нахождения этих двух значений тока запишем закон Ома в виде

$$\mathsf{E} = 8I + a + \frac{b}{I},$$

или, после приведения к общему знаменателю и подстановки числовых значений,

$$8I^2 - 90I + 100 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $I_1 = 1{,}25$ А и $I_2 = 10$ А. Дуговой разряд при токе $I_1 = 1{,}25$ А ($U = 90$ В) оказывается неустойчивым. Следовательно, в цепи установится ток

$$I_2 = 10 \text{ А}.$$

Задача 5. *В схеме, представленной на рисунке 7, ключ K замыкают на время τ, а затем размыкают. В момент размыкания ключа ток в катушке равен I_0. Через какое время после размыкания ключа ток в катушке достигнет максимального значения, которое равно $2I_0$? Постройте график зависимости тока в катушке от времени, начиная с момента замыкания ключа. Омическим сопротивлением в данной схеме пренебречь.*

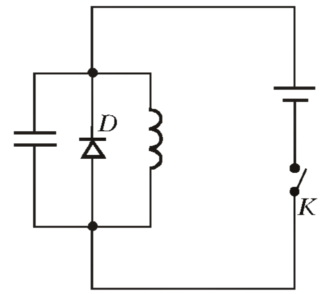


Рис. 7

После замыкания ключа конденсатор сразу зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи E, а в катушке ток будет нарастать по линейному закону

$$I(t) = \frac{\mathsf{E}}{L}t,$$

где L – индуктивность катушки. В момент размыкания ключа мы будем иметь колебательный контур с такими начальными условиями: напряжение на конденсаторе $U_C(0) = \mathsf{E}$, ток в катушке $I_L(0) = I(\tau) = \mathsf{E}\tau/L = I_0$ (рис.8). Отсчет времени ($t = 0$) начинается с момента размыкания ключа, диод при этом закрыт. Уравнение для тока в данном колебательном контуре будет иметь вид

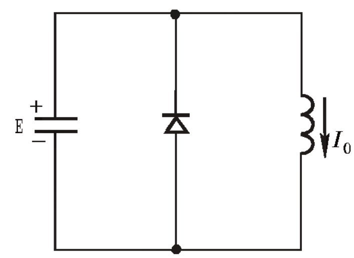


Рис. 8

$$I_L'' + \omega_0^2 I_L = 0,$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота собственных колебаний контура, C – емкость конденсатора. Решение уравнения ищем в виде

$$I_L = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где A и B – константы. Из условия, что при $t = 0$ $I_L = I_0$, получаем $A = I_0$. Для нахождения константы B запишем уравнение контура в другом виде:

$$L\frac{dI_L}{dt} = U_C.$$

Подставив в это уравнение наше решение и положив $t = 0$, получим $B = \mathsf{E}/(L\omega_0)$. Для выражения B через заданные параметры запишем закон сохранения энергии в контуре для $t = 0$ и $t = t_1$, когда ток достигает максимального значения $2I_0$:

$$\frac{C\mathsf{E}^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{4LI_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$C\mathsf{E}^2 = 3LI_0^2, \text{ и } B = \frac{\mathsf{E}}{L\omega_0} = \sqrt{3}I_0.$$

Следовательно, зависимость тока в контуре от времени будет иметь вид

$$I_L(t) = I_0\cos\omega_0 t + \sqrt{3}I_0\sin\omega_0 t.$$

При достижении максимального значения тока $dI_L(t_1)/dt = 0$. Из этого условия следует

$$\operatorname{tg}(\omega_0 t_1) = \sqrt{3}, \quad \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$t_1 = \frac{\pi}{3\omega_0} = \frac{\pi\tau}{\sqrt{3}}.$$

В момент t_1, когда ток достигнет максимального значения, диод будет открыт, и ток начнет циркулировать по контуру катушка – диод с постоянным значением $I_L = 2I_0$.

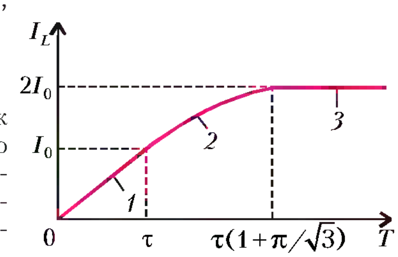


Рис. 9

Зависимость тока в катушке I_L от времени T (рис.9) разбивается на три участка: *1* – отрезок времени между замыканием и размыканием ключа, *2* – участок колебательного процесса ($0 \le t \le t_1$), *3* – циркуляционный процесс ($t \ge t_1$), при этом время T отсчитывается от момента замыкания ключа.

Упражнения

1. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U на трубке имеет вид, изображенный на рисунке 10. При некотором напряжении на трубке $U_н$ ток через трубку достигает насыщения, при этом ток насыщения равен $I_н = 10$ мкА. Если трубка, последовательно соединенная с некоторым балластным резистором, подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^3$ В, то через трубку течет ток $I_0 = 5$ мкА. Как надо изменить сопротивление балластного резистора, чтобы достичь тока насыщения?

Рис. 10

2. В одно из плеч моста (см. рис.2) включено нелинейное сопротивление X, для которого зависимость силы тока I_X от приложенного напряжения U_X задается формулой $I_X = aU_X^2$.

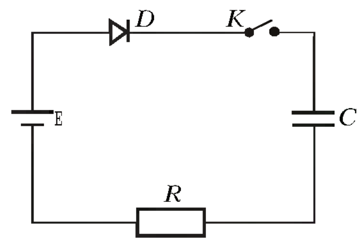


Рис. 11

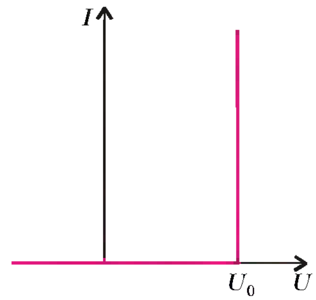


Рис. 12

Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = R_3 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом. При каком значении константы a мощность, расходуемая в нелинейном сопротивлении, равна $P_X = 1$ Вт для сбалансированного моста (ток через гальванометр Г равен нулю)?

3. В схеме, изображенной на рисунке 11, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C = 100 мкФ не заряжен. Вольт-амперная характеристика диода D показана на рисунке 12. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, сопротивление резистора R = 1 кОм. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

Э.ГОТМАН

В учебных пособиях по геометрии часто встречаются задачи о сфере, описанной около правильной пирамиды, а также о сфере, вписанной в пирамиду (сфере, касающейся всех граней пирамиды), и гораздо реже – задачи, в которых фигурирует сфера, касающаяся всех ребер пирамиды. Между тем, задачи такого рода предлагаются на вступительных экзаменах в некоторые высшие учебные заведения. Для их решения требуется хорошее пространственное воображение, умение выполнить правильный и наглядный чертеж, знание планиметрии и тригонометрии. Старшеклассникам полезно познакомиться с приемами решения таких задач.

В предлагаемой статье рассматривается сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. Всегда ли существует такая сфера?

Прежде всего ответим на этот вопрос. Напомним некоторые сведения, которые потребуются нам в дальнейшем.

Как известно, плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка – точкой касания (рис.1). Любая прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания A, называется касательной к сфере. Говорят также, что сфера касается прямой в точке A.

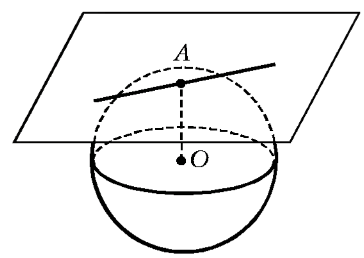


Рис. 1

Для прямой, касательной к сфере, имеет место теорема, аналогичная теореме о касательной прямой к окружности.

Теорема 1. *Если прямая касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Обратно, если прямая проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к сфере.*

Рассмотрим в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся сторон данного треугольника. Прежде всего заметим, что центр O вписанной в треугольник ABC окружности является центром одной такой сфе-

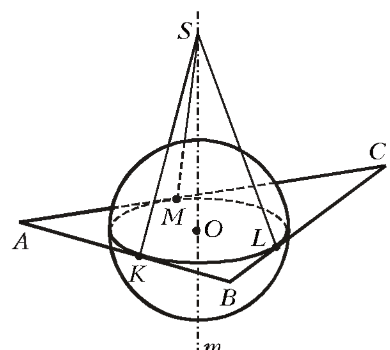


Рис. 2

ры (рис.2). Если K, L, M – точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA соответственно, то сфера с центром O и радиусом OK касается всех сторон треугольника ABC. Теперь нетрудно догадаться, что искомое множество точек есть перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, проходящий через точку O. Действительно, если S – точка, принадлежащая перпендикуляру m, то $SK = SL = SM$ как наклонные, имеющие на плоскости ABC равные проекции. Кроме того, по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AB$, $SL \perp BC$, $SM \perp CA$. Значит, согласно теореме 1, сфера с центром O и радиусом SK касается всех сторон треугольника ABC. Если же некоторая точка Q не лежит на перпендикуляре m к плоскости ABC, то не все расстояния от точки Q до сторон AB, BC, CA равны (в силу теоремы о наклонных и их проекциях на плоскость), и потому точка Q не является центром сферы, касающейся всех сторон треугольника ABC.

Аналогично доказывается, что в пространстве множество точек – центров сфер, касающихся всех сторон правильного многоугольника, также есть перпендикуляр к плоскости многоугольника, проходящий через его центр. Теперь дадим ответ на поставленный вопрос.

Теорема 2. *Для всякой правильной пирамиды всегда существует сфера, касающаяся всех ее ребер.*

Доказательство. Пусть $NA_1 \ldots A_n$ – правильная n-угольная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема, P – центр окружности, вписанной в грань NA_1A_2 (на рисунке 3 изображена лишь n-я часть пирамиды). Центр сферы, касающейся всех сторон правильного многоугольника $A_1 \ldots A_n$, лежит на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Множество центров сфер, касающихся сторон треугольника NA_1A_2, есть перпендикуляр m к плоскости NA_1A_2, проходящий через точку P. Прямые m и NH лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке O_1. Это следует из того, что $A_1A_2 \perp NH$, $A_1A_2 \perp NK$, и, значит, по теореме о двух перпендикулярах, A_1A_2 – перпендикуляр к плоскости NKH. Поэтому плоскости NHK и NA_1A_2 перпендикулярны. Следовательно, прямая m лежит в плоскости NHK и пересекает прямую NH, поскольку угол NKH острый.

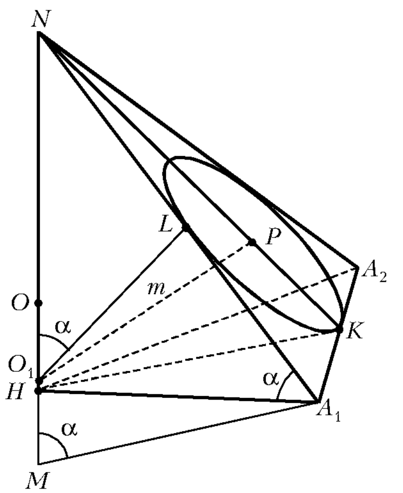


Рис. 3

Отсюда следует, что точка O_1 есть центр сферы, касающейся сторон основания пирамиды и боковых ребер NA_1 и NA_2. Радиус ее равен O_1K. Эта сфера касается и всех других ребер пирамиды, так как расстояния от точки O_1 до боковых ребер равны между собой.

Таким образом, всегда существует сфера, касающаяся всех ребер правильной пирамиды. При этом каждая грань пересекает сферу по окружности, вписанной в грань, а точки касания окружности с ребрами являются в то же время точками касания сферы и ребер. Центр сферы лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении. Отрезок, соединяющий центр O_1 сферы с точкой касания L ребра пирамиды и окружности, вписанной в грань, перпендикулярен ребру и равен радиусу сферы.

Рассмотрим несколько задач о сфере, касающейся всех ребер правильной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды равно b, угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.*

Решение. Воспользуемся прежними обозначениями и рисунком 3. Так как $A_1A_2 \ldots A_n$ – правильный многоугольник, то, полагая $A_1A_2 = a$, имеем $A_1L = A_1K = \frac{1}{2}a$, $LN = b - \frac{1}{2}a$ (отрезки A_1L и A_1K равны, как отрезки касательных к окружности, вписанной в грань NA_1A_2). Прямоугольные треугольники HA_1N и LO_1N имеют общий угол N, и потому $\angle LO_1N = \angle HA_1N = \alpha$. Обозначив радиус искомой сферы через R_1, находим

$$R_1 = LN \operatorname{ctg}\alpha = \left(b - \frac{1}{2}a\right)\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$a = 2HA_1 \sin\frac{\pi}{n} = 2b \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$R_1 = b\operatorname{ctg}\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right). \qquad (1)$$

В приведенном примере данные элементы b и α принадлежали одному прямоугольному треугольнику. Поэтому имелась возможность вычислять промежуточные неизвестные величины одну за другой. В более сложных случаях приходится прибегать к введению вспомогательных неизвестных.

Пользуясь формулой (1), легко получить другие формулы для вычисления радиуса R_1 сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Продолжим высоту NH пирамиды за точку H до пересечения с описанной около пирамиды сферой в точке M (см. рис.3). Тогда MN – диаметр сферы, а также диаметр окружности, описанной около треугольника A_1MN. Поэтому $\angle MA_1N = 90^\circ$, $A_1H \perp MN$, $\angle NMA_1 = \angle NA_1H = \alpha$. Если R – радиус сферы, описанной около правильной пирамиды, то $MN = 2R$. Из треугольника A_1MN следует, что $b = 2R\sin\alpha$, и поэтому

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right). \qquad (2)$$

Обозначим высоту NH пирамиды через h. Из треугольника NA_1H имеем $b = \frac{h}{\sin\alpha}$. Следовательно,

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Центр сферы, вписанной в пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды. Центр же описанной сферы может лежать как на высоте, так и на продолжении высоты вне пирамиды. Пользуясь рисунком 3, легко сравнить отрезки NH и MH. Если $\alpha = 45^\circ$, то центр O описанной сферы совпадает с центром основания H. При $\alpha > 45^\circ$ центр O лежит на высоте пирамиды, так как $NH > MH$, а при $\alpha < 45^\circ$ – на продолжении высоты NH за точку H ($NH < MH$).

Выясним, где расположен центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

Задача 2. *Высота правильной n-угольной пирамиды равна h, угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α. На каком расстоянии от плоскости основания находится центр O_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды?*

Решение. Воспользуемся формулой (3):

$$R_1 = \frac{h\cos\alpha\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Далее находим

$$NO_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$NO_1 - h = \frac{h\cos\alpha\left(\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\alpha},\ \text{где}\ 0<\alpha<\frac{\pi}{n}.$$

Отсюда следует, что точки O_1 и H совпадают тогда и только тогда, когда $\cos\alpha=\sin\frac{\pi}{n}$, или $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)$, откуда $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$. Точка O_1 лежит на высоте пирамиды, если $NO_1<NH$, или

$$\cos\alpha<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right),\ \text{откуда}\ \alpha>\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}.$$

Наконец, если $\alpha<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$, то точка O_1 лежит на продолжении высоты пирамиды NH, т.е. вне пирамиды.

В частности, для правильной треугольной пирамиды получаем $\alpha=\frac{\pi}{6}$, для четырехугольной пирамиды $\alpha=\frac{\pi}{4}$, для шестиугольной $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Элементарно-геометрическим способом нетрудно доказать, что в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают тогда и только тогда, когда плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π. Могут ли в правильной n-угольной пирамиде совпадать центр описанной сферы и центр сферы, касающейся всех ребер пирамиды? Решив следующую задачу, получим ответ на этот вопрос.

Задача 3. *Докажите, что расстояние d между центром O сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и центром O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, может быть выражено формулами*

$$а)\ d=\frac{|a-b|}{2\sin\alpha},\qquad б)\ d=b\frac{\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha},$$

где a и b – длины сторон основания и бокового ребра пирамиды, α – угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Решение. Расстояние между центрами сфер равно $|NO_1-NO|$. Из треугольника NO_1L (см. рис.3) находим

$$NL=b-\frac{a}{2},\ NO_1=\frac{2b-a}{2\sin\alpha}.$$

Из треугольника MNA_1 имеем

$$MN=2R=\frac{b}{\sin\alpha},\ \text{откуда}\ R=\frac{b}{2\sin\alpha}.$$

Следовательно,

$$NO_1-NO=NO_1-R=\frac{b-a}{2\sin\alpha},$$

или

$$d=\frac{|a-b|}{2\sin\alpha}.$$

Чтобы вывести формулу б), найдем зависимость между величинами a и b. Имеем: $HA_1=b\cos\alpha$, $a=2HA_1\sin\frac{\pi}{n}$. Значит, $a=2b\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha$. Подставив значение a в предыдущую формулу, получим

$$d=\frac{b\left|1-2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right|}{2\sin\alpha}.$$

Из формулы а) следует, что центры O и O_1 совпадают тогда и только тогда, когда $a=b$, т.е. когда все боковые грани пирамиды – равносторонние треугольники, что возможно лишь при $n<6$.

Из формулы б) следует, что $d=0$ лишь при условии

$$2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha=1,\ \text{или}\ \cos\alpha=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Так как $\cos\alpha<1$, то это возможно лишь при $n=3$, $n=4$ и $n=5$.

Заметим, что если $n=4$, то $\alpha=\frac{\pi}{4}$. При этом точки O, O_1 и H совпадают.

Итак, центры O и O_1 могут совпадать только тогда, когда правильная пирамида треугольная, четырехугольная или пятиугольная.

Задача 4. *Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде расстояние d между центрами сфер, описанной около пирамиды и касающейся всех ее ребер, выражается формулой*

$$d=\frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Пусть NH – высота правильной шестиугольной пирамиды, O – центр описанной около нее сферы, O_1 –

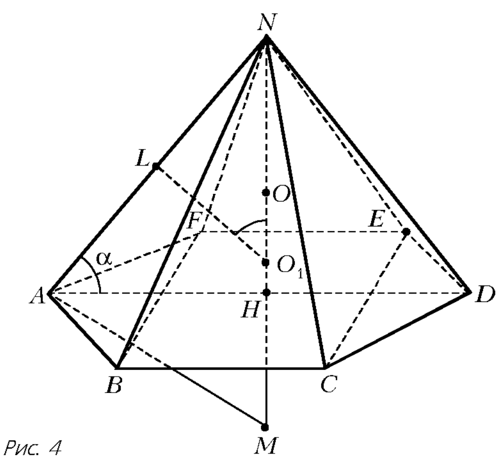


Рис. 4

центр сферы, касающейся всех ее ребер (рис.4). Воспользуемся результатом задачи 3 и получим

$$NO_1-NO=\frac{b\left(1-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right)}{2\sin\alpha}=\frac{b(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha}=\frac{1}{2}b\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $0^\circ<\alpha<90^\circ$, то $NO_1-NO>0$. Это значит, что центр описанной сферы при любом значении α лежит между вершиной пирамиды и центром сферы, касающейся всех ее ребер.

Задача 5. *Радиус сферы, описанной около правильной шестиугольной пирамиды, равен R. Радиус сферы, касающейся всех ее ребер, равен R_1. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду, и расстояния от вершины пирамиды*

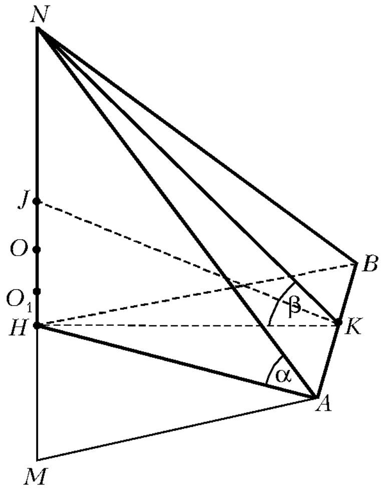


Рис. 5

до центров этих сфер, если $R = 4$ и $R_1 = 3$.

Решение. Проведем высоту NH данной шестиугольной пирамиды (рис.4 и 5). Тогда $\angle HKN$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды. Центр J вписанной сферы лежит на высоте пирамиды и на биссектрисе угла HKN.

Введем обозначения: $JH = r$ (радиус вписанной сферы), $NH = h$, $\angle HKN = \beta$, $\angle NAH = \alpha$. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем

$$\frac{HJ}{JN} = \frac{HK}{KN},$$

или

$$\frac{r}{h-r} = \cos\beta,$$

откуда

$$r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}. \qquad (4)$$

Вычислим неизвестные h и $\cos\beta$. Сначала найдем угол α. Воспользовавшись формулой (2), получим уравнение

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right),$$

или

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + \frac{R_1}{R} = 0,$$

откуда $\cos\alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_1}{R}}$ (второй корень уравнения не подходит, так как $\cos\alpha < 1$).

При $R = 4$ и $R_1 = 3$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \alpha = 60^\circ.$$

Далее из треугольников AMN и AHN находим

$$h = 2R\sin^2\alpha,\ h = 8\cdot\frac{3}{4} = 6.$$

Остается найти связь между углами α и β. Из треугольников ANH и KNH имеем $AH = h\operatorname{ctg}\alpha$, $KH = h\operatorname{ctg}\beta$. А так как $KH = AH\sin 60^\circ$, то

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha,$$

и легко находим, что $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставив значения h и $\cos\beta$ в формулу (4), получим

$$r = \frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} \approx 1{,}8.$$

Расстояние от вершины N пирамиды до центра O сферы, описанной около пирамиды, равно R, а расстояние от вершины N до центра O_1 сферы, касающейся всех ребер, равно $\frac{R}{\cos\alpha}$. Следовательно, если $R = 4$ и $R_1 = 3$, то $NO = 4$, $NJ \approx 6 - 1{,}8 = 4{,}2$ и $NO_1 = 6$ (т.е. центр O_1 совпадает с центром основания H).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать истинность следующих соотношений между основными углами в правильной n-угольной пирамиде:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$,

б) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$, в) $\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$,

где γ – величина плоского угла при вершине пирамиды, α и β – величины тех же углов, что и в задаче 5.

Формулы а), б) и в) находят применение при решении предлагаемых ниже задач.

Следующая задача по содержанию близка предыдущей. Сохраняя прежние обозначения, при решении ее воспользуемся уже известными формулами.

Задача 6. *Дана правильная треугольная пирамида, r и R – радиусы вписанной и описанной сфер. Найдите высоту h пирамиды и радиус R_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды, если $r = 1$ и $R = 3{,}5$.*

Решение. Воспользуемся формулами

$$h = 2R\sin^2\alpha \text{ и } h = \frac{r(1+\cos\beta)}{\cos\beta}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{2R}{r}\sin^2\alpha = \frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}. \qquad (5)$$

В правильной треугольной пирамиде углы α и β связаны: $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\beta$. В силу тождества $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ имеем

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2\beta} - 3, \text{ откуда } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\beta}{1+3\cos^2\beta}.$$

Подставив значение $\sin^2\alpha$ в равенство (5), получим уравнение

$$(2R+3r)\cos^2\beta - 2R\cos\beta + r = 0,$$

которое при $\frac{R}{r} \ge 3$ имеет два корня:

$$\cos\beta = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - 3r^2}}{2R+3r}$$

(если $\frac{R}{r} = 3$, то корни равны: $\cos\beta = \frac{1}{3}$).

При $r = 1$ и $R = 3{,}5$ уравнение принимает вид

$$10\cos^2\beta - 7\cos\beta + 1 = 0,$$

откуда $\cos\beta = \frac{1}{2}$ или $\cos\beta = \frac{1}{5}$.

Если $\cos\beta = \frac{1}{2}$, то $\beta = 60^\circ$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 2R\sin^2\alpha,\ h = 7;$$

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right),\ R_1 = 2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right) \approx 2.$$

Если $\cos\beta = \frac{1}{5}$, то $\sin^2\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 6,\ R_1 = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}8.$$

Продолжим исследование свойств сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Для этого предварительно решим следующую задачу.

Задача 7. *Пусть R и r – радиусы сфер, описанной около правильной n-угольной пирамиды и вписанной в нее, d – расстояние между их центрами. Докажите, что*

а) $d^2 = R^2 - 2Rr - r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}$, *б)* $\frac{R}{r} \ge 1 + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$,

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

Решение. Воспользуемся теми же обозначениями и формулами, что и при решении предыдущих задач. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} h = 2R\sin^2 \alpha, \\ h = r\left(1 + \dfrac{1}{\cos\beta}\right), \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{n}} \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства и получим

$$\frac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right).$$

Из первых двух уравнений находим

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2R}{2R - h}, \quad \frac{1}{\cos\beta} = \frac{h - r}{r}.$$

Подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем квадратное уравнение относительно h:

$$h^2 - 2(R + r)h + 4Rr + \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}} = 0, \qquad (6)$$

откуда

$$h = R + r + \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$

А так как расстояние d между центрами описанной и вписанной сфер равно $|NJ - NO| = |h - r - R|$, то

$$d = \sqrt{(R - r)^2 - \frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

или

$$d^2 = R^2 - 2Rr - r^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Дискриминант уравнения (6) неотрицателен, следовательно,

$$\frac{R}{r} \ge 1 + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $d = 0$, т.е. центры сфер совпадают.

Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить аналогичное неравенство для радиуса описанной сферы и радиуса сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды?

Задача 8. *Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, и R_1 – радиус сферы, касающейся всех ее ребер. Докажите, что*

$$\frac{R}{R_1} \ge 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (2):

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right)$$

и представим ее в виде

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right).$$

Применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел a и b: $ab \le \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$, где равенство имеет место только при $a = b$. Получим

$$y = \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha\right) \le \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{2y}{\sin\frac{\pi}{n}} \le \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

или

$$\frac{R}{R_1} \ge 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1 - \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha, \text{ или } 2\sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha = 1,$$

т.е. тогда, когда $n < 6$ и центры сфер совпадают (см. задачу 3). Для правильной треугольной пирамиды получаем $\frac{R}{R_1} \ge 3$, для четырехугольной пирамиды $\frac{R}{R_1} \ge \sqrt{2}$ (равенство имеет место при $\alpha = 45^\circ$). Для шестиугольной пирамиды и при всех $n > 6$ имеем $\frac{R}{R_1} > 1$, т.е. $R > R_1$.

Из приведенных примеров видно, что решение связанных между собой задач упрощается, если задачи расположены в определенной последовательности так, что решение первых, более простых задач помогает отыскать решение последующих.

Предлагаем читателям для самостоятельного решения еще несколько задач о сфере, касающейся ребер правильной пирамиды.

Упражнения

1. Сторона основания правильной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании равен 60°. Найдите радиус r сферы, вписанной в пирамиду, и радиус R_1 сферы, касающейся всех ее ребер.

3. В сферу радиуса R вписана правильная шестиугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, в два раза больше радиуса сферы, касающейся всех ее ребер. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

5. В правильной n-угольной пирамиде центр O сферы, описанной около пирамиды, симметричен центру O_1 сферы, касающейся всех ее ребер, относительно плоскости основания. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к основанию. Вычислите его при $n = 6$.

LXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Решите ребус $БАО \cdot БА \cdot Б = 2002$.

А.Блинков, А.Хачатурян

2. Незнайка разрезал фигуру (рис.1) на трехклеточные и четырехклеточные уголки, нарисованные справа от нее. Сколько трехклеточных уголков могло получиться?

А.Митягин

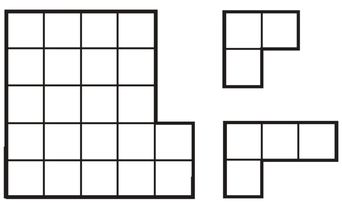


Рис. 1

3. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стерли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

В.Произволов

4. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна – ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку (рис.2). Побейте его рекорд – закрасьте 33 клетки!

И.Акулич

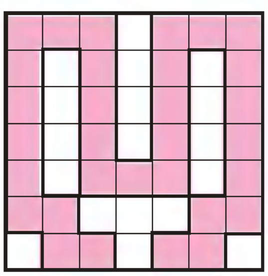


Рис. 2

5. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алеше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотые и 3 серебряные. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алеше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю» и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

А.Чеботарев

6. Айрат выписал подряд все числа месяца:

12345678910111213...

и покрасил дни рождения троих своих друзей. Оказалось, что никакие два дня рождения не идут подряд и все непокрашенные промежутки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

И.Григорьева

7 класс

1. 2002 – год-палиндром, т.е. одинаково читается слева направо и справа налево. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов идут подряд между 1000 и 9999 годами?

Г.Гальперин, Д.Григоренко

2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. В написанном на доске примере на умножение хулиган исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример.

И.Ященко

4. При помощи пластмассового угольника с углами 30°, 60° и 90° постройте угол величиной 15°.

М.Панов

5. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна – ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток (рис.3). Побейте его рекорд – закрасьте 42 клетки!

И.Акулич

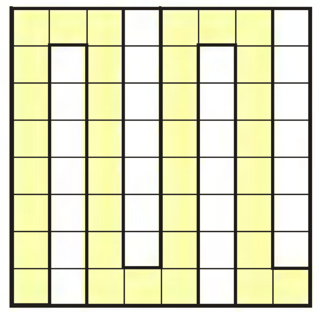


Рис. 3

6. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовали 12 человек. Каждый сыграл с каждым одну партию. За победу в партии дают одно очко, за ничью – пол-очка, а за поражение – ноль очков. По итогам турнира звание мастера спорта присвоили тем участникам, которые набрали более 70% от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли стать мастерами спорта а) 7; б) 8 участников?

Е.Иванова

Избранные задачи для старших классов[1]

1. Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в точке A пересекает отрезок AB в точке C, причем $AC < \frac{1}{2} AB$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB. (8)

А.Заславский

2. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной горизонтали или вертикали не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выиграет при правильной игре? (8)

А.Бучин

3. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB а) прямой; б) острый, то $AC + BC > 3AB$. (8)

И.Богданов

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

4. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мертвой. Каждую минуту все живые клетки умирают, а те мертвые, которые граничат с нечетным числом живых (по стороне), оживают. Укажите все пары (m, n), при которых жизнь в прямоугольнике может существовать вечно. (8)

А.Горбачев

5. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые направо, а остальные кругом. Всегда ли сержант может стать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом? (9)

А.Шаповалов

6. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. (9)

В.Сендеров

7. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC в точках F и G. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб. (9)

В.Жгун

8. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$. (9)

В.Сендеров

9. Остроугольный треугольник разрезали по прямой на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей – опять на две части, и т.д. Через несколько шагов все части оказались треугольниками. Могут ли все они быть тупоугольными? (9)

Г.Гальперин

10. Тангенсы углов треугольника – натуральные числа. Чему они могут быть равны? (10, 11)

А.Заславский

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны (в каком-то порядке) последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD? (10)

С.Шестаков

12. Все места в первом ряду кинотеатра заняты зрителями, купившими билеты в первый ряд, но при этом каждый сидит не на своем месте. Билетер может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места? (10, 11)

А.Шаповалов

13. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в белый и черный цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)? (10)

Г.Гальперин

14. Докажите, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ – такую точку B, что расстояние AB не превысит $1/100$. (11)

А.Спивак, А.Хачатурян

15. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих. Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны между собой. (11)

А.Шаповалов

16. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C – центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны. (11)

Л.Емельянов

Публикацию подготовили А.Спивак, Б.Френкин

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. Из Анискино (*А*) в Борискино (*Б*), расстояние между которыми 60 км, в 12^{00} выехал и ехал с постоянной скоростью 10 км/ч велосипедист. Из *Б* в *А* выехал и ехал с постоянной скоростью 30 км/ч автомобиль. Они встретились на одинаковом расстоянии от *А* и *Б*. На каком расстоянии друг от друга они находились в 14^{00}; в 16^{00}?

С.Варламов

2. Ширина футбольных ворот L = 5 м. Вратарь массой m = 80 кг подпрыгнул и, зацепившись рукой, повис на перекладине на расстоянии l = 1 м от правой штанги. Как изменилась разность сил давления перекладины ворот на правую и левую штанги?

С.Варламов

3. Школьник прочитал в газете «Советы домохозяйке» следующую заметку: «Для того чтобы рассортировать куриные яйца по степени свежести, возьмите четыре стеклянные банки, налейте в каждую пол-литра воды и растворите в первой банке 50 г соли, во второй 45 г, в третьей 30 г и в четвертой 15 г. После этого поочередно опускайте яйца в каждую банку. В первой банке будут тонуть только что снесенные яйца, во второй – снесенные не более двух недель назад, в третьей – снесенные не более пяти недель назад, в четвертой – снесенные не более восьми недель назад». Школьник сделал растворы, строго следуя рецепту, рассортировал имевшиеся в холодильнике яйца, а затем слил содержимое из всех четырех банок в одну большую емкость. Сколько недель назад были снесены яйца, которые тонут в получившемся растворе?

А.Якута

9 класс

1. Не дождавшись автобуса, пешеход пошел пешком к следующей автобусной остановке, павильон которой был виден вдали. Через некоторое время он обнаружил, что кажущаяся высота этого павильона в $k = 1{,}5$ раза меньше кажущейся высоты павильона, от которого он отошел. Пройдя еще $L = 100$ м, пешеход заметил, что теперь павильон впереди кажется ему в $k = 1{,}5$ раза выше павильона позади. Найдите расстояние между остановками. Считать, что кажущийся размер предмета обратно пропорционален расстоянию до него. Остановочные павильоны одинаковы, пешеход идет по соединяющей их прямой.

Д.Харабадзе

2. Для организации транспортного сообщения между населенными пунктами A и $Б$, расположенными на одной горизонтали на небольшом расстоянии l друг от друга, между ними прорывают тоннель, состоящий из двух одинаковых прямых участков (рис.1). По рельсам внутри тоннеля скользит без трения безмоторная вагонетка. Какова должна быть максимальная глубина тоннеля h, чтобы время поездки от A до $Б$ было минимальным? Чему равно это время? Считать, что движение вагонетки начинается без начальной скорости, а на закруглении в нижней точке тоннеля величина скорости не изменяется.

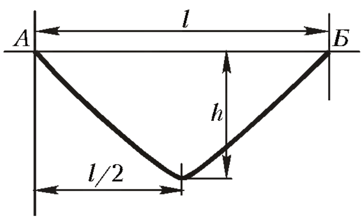


Рис. 1

В.Птушенко

3. В «черном ящике» с тремя контактами находится схема, спаянная из идеальной батарейки и резистора. Если к контактам *1* и *2* подсоединить другой резистор с известным сопротивлением r, то через него будет течь ток $I_{12} \neq 0$. При подсоединении этого же резистора к контактам *1* и *3* через него потечет ток $I_{13} \neq 0$, причем $I_{13} \neq I_{12}$. При подключении этого резистора к контактам *2* и *3* ток через него течь не будет. Чему могут быть равны напряжение батарейки и сопротивление резистора, находящегося в «черном ящике»? Какие схемы могут находиться в «черном ящике»?

О.Шведов

10 класс

1. На массивный гладкий цилиндр радиусом R, движущийся поступательно со скоростью u, налетает маленький шарик, движущийся навстречу цилиндру перпендикулярно его оси со скоростью v (рис.2). Расстояние между линией, вдоль которой движется шарик, и плоскостью, в которой движется ось цилиндра, равно L ($L < R$). Найдите величину скорости шарика v_1 после абсолютно упругого удара о цилиндр. Сила тяжести отсутствует.

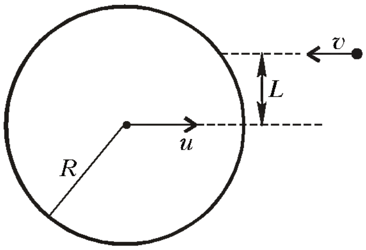


Рис. 2

А.Якута

2. Маленький шарик массой m и зарядом q, брошенный со скоростью v под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, пролетев вдоль поверхности земли расстояние L, попадает в область пространства, в которой кроме поля силы тяжести имеется еще и однородное постоянное горизонтальное электрическое поле. Граница этой области вертикальна. Через некоторое время после этого шарик падает в точку, откуда был произведен бросок. Найдите напряженность электрического поля E. Ускорение свободного падения равно g, влиянием воздуха пренебречь.

А.Якута

3. В «черном ящике» с двумя контактами находится схема, состоящая из незаряженного конденсатора и резистора. К контактам в момент времени $t = 0$ подсоединили конденсатор емкостью C, имеющий заряд Q_0. График зависимости заряда на этом конденсаторе от времени изображен на рисунке 3. Найдите сопротивление резистора и емкость конденсатора, находящихся в «черном ящике».

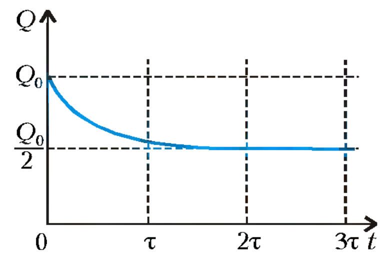


Рис. 3

О.Шведов

11 класс

1. Телу массой m, находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили скорость v_0 в направлении оси X. График зависимости скорости тела v от его координаты x изображен на рисунке 4. Найдите зависимость величины силы трения, действующей на тело, от координаты x.

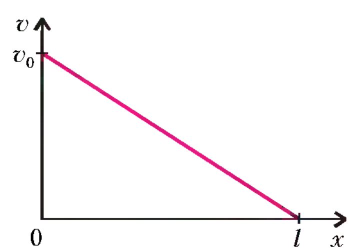


Рис. 4

О.Шведов

2. Два закрытых сосуда емкостью $V_1 = 10$ л и $V_2 = 20$ л имеют жесткие стенки и поддерживаются при одинаковой постоянной температуре 0 °С. Сосуды соединены короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В первом сосуде находится воздух под давлением $p_1 = 2$ атм при относительной влажности $\varphi_1 = 20\%$. Во втором сосуде находится воздух под давлением $p_2 = 1$ атм при относительной влажности $\varphi_2 = 40\%$. Кран постепенно открывают так, что процесс выравнивания давлений в сосудах можно считать изотермическим. Найдите минимальную и максимальную относительную влажность воздуха в сосуде емкостью 10 литров.

С.Варламов

3. Заряженная частица двигалась в некоторой области пространства, где имеются взаимно перпендикулярные однородные поля: электрическое с напряженностью $\vec{E}$, магнитное с индукцией $\vec{B}$ и поле силы тяжести $\vec{g}$. Вектор скорости частицы при этом был постоянным и перпендикулярным магнитному полю. После того как частица покинула эту область пространства и начала движение в другой области, где имеется только поле силы тяжести, ее скорость начала уменьшаться. Через какое время после вылета частицы из первой области ее скорость достигнет минимального значения?

А.Якута

Второй теоретический тур

8 класс

1. По шоссе равномерно движется длинная колонна автомобилей. Расстояния между соседними автомобилями в колонне одинаковы. Едущий по шоссе в том же направлении инспектор ГИБДД обнаружил, что если его скорость равна $v_1 = 36$ км/ч, то через каждые $\tau_1 = 10$ с его обгоняет автомобиль из колонны, а при скорости $v_2 = 90$ км/ч через каждые $\tau_2 = 20$ с он обгоняет автомобиль из колонны. Через какой промежуток времени будут проезжать автомобили колонны мимо инспектора, если он остановится?

О.Шведов

2. Хулиган-двоечник прогуливался вблизи стройки и увидел страшную картину (рис.5). Молодец-отличник стоял на краю горизонтальной доски длиной $L = 6$ м, которая опиралась другим концом на край балкона второго этажа. Отличник держался за веревку, пропущенную через два блока, оси которых крепились на стене дома. Другой конец веревки был привязан к доске на расстоянии $l = 4$ м от балкона.

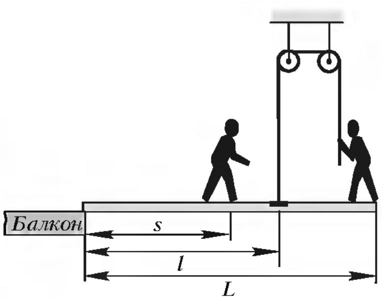


Рис. 5

Двоечник бросился на помощь отличнику, но, не дойдя до него, услышал: «Ни шагу дальше, мы оба упадем!» При каком расстоянии s от края балкона до двоечника должен был это сказать молодец-отличник, чтобы катастрофы не случилось? Масса доски $m_д = 8$ кг, масса хулигана-двоечника $m_х = 50$ кг, масса молодца-отличника $m_о = 40$ кг.

Ю.Старокуров

3. Сухие дрова плотностью $\rho_1 = 600$ кг/м^3, привезенные со склада, свалили под открытым небом и ничем не укрыли. Дрова промокли, и их плотность стала $\rho_2 = 700$ кг/м^3. Для того чтобы в холодную, но не морозную погоду (при температуре $t = 0$ °C) протопить дом до комнатной температуры, нужно сжечь в печи $M_1 = 20$ кг сухих дров. Оцените, сколько нужно сжечь мокрых дров, чтобы протопить дом до той же комнатной температуры. Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота сгорания сухих дров $q = 10^7$ Дж/кг.

С.Варламов

9 класс

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположены две одинаковые маленькие шайбы. В начальный момент времени первой шайбе сообщили некоторую скорость вдоль линии, соединяющей центры шайб. Оказалось, что за время t первая шайба прошла путь s_1, а вторая – путь s_2. Чему могут быть равны начальная скорость первой шайбы и начальное расстояние между шайбами? Трение отсутствует, удар шайб друг о друга не обязательно абсолютно упругий.

О.Шведов

2. Холодильник поддерживает в морозильной камере постоянную температуру $t_0 = -12$ °C. Кастрюля с водой охлаждается в этой камере от температуры $t_1 = +29$ °C до $t_2 = +25$ °C за $\tau_1 = 6$ мин, а от $t_3 = +2$ °C до $t_4 = 0$ °C – за $\tau_2 = 9$ мин. За сколько времени вода в кастрюле замерзнет (при 0 °C)? Теплоемкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 336$ кДж/кг.

М.Семенов

10 класс

1. Маленькая шайба скользит по винтовому желобу с углом наклона α к горизонту и радиусом R с постоянной скоростью v (рис.6). Ось желоба вертикальна, ускорение свободного падения равно g. Чему равен коэффициент трения между шайбой и желобом?

М.Семенов

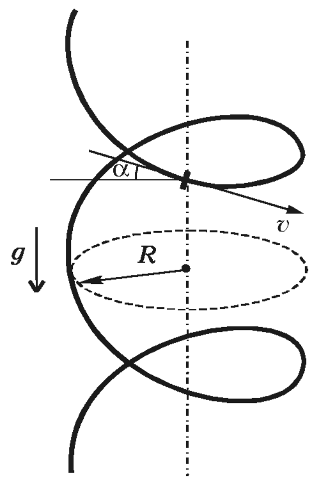


Рис. 6

2. В горизонтальном прямом желобе на равных расстояниях $L = 1$ м друг от друга лежат $N = 2002$ маленьких шарика. Известно, что шарики разложены в порядке убывания их масс и что массы соседних шариков отличаются друг от друга на $\alpha = 1\%$. Самому тяжелому шарику в момент времени $t = 0$ сообщили скорость $v = 1$ м/с в направлении остальных шариков. Считая все удары абсолютно упругими, найдите, через какое время после этого начнет двигаться самый легкий шарик. Трения нет. Временем соударения пренебречь.

А.Якута

11 класс

1. На горизонтальной плоскости лежит полусфера радиусом R (выпуклой стороной вверх). Из точки, находящейся над центром полусферы, бросают горизонтально маленькое тело, которое падает на плоскость, не касаясь полусферы. Найдите минимально возможную скорость тела в момент его падения на плоскость.

А.Зильберман

2. На расстоянии $d = 20$ см от тонкой собирающей линзы вдоль ее главной оптической оси расположена тонкая короткая палочка. Длина ее действительного изображения, даваемого линзой, в $k = 9$ раз больше длины палочки. Во сколько раз изменится длина изображения, если сдвинуть палочку параллельно оси на $\Delta d = 5$ см дальше от линзы?

Замечание: при $x \ll 1$ справедлива формула

$$1/(1+x) \approx 1 - x .$$

М.Семенов

Публикацию подготовили М.Семенов, А.Якута

Уравнения Пелля

21. а) Одно решение очевидно: $4^2 - 2\cdot 1^2 = 14$. Если $x^2 - 2y^2 = 14$, то $(3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = 14$, так что из всякого решения $(x; y)$ можно получить еще одно решение $(3x+4y; 2x+3y)$. При положительных x и y числа $3x + 4y$ и $2x + 3y$ тоже положительны и $3x + 4y > x$ (да и $2x + 3y > > y$).

б) Воспользуйтесь тем, что $23 = 5^2 - 2\cdot 1^2$.

в) *Первый способ.* Пусть $x^2 - 2y^2 = 3$. Если хотя бы одно из чисел x и y делится на 3, то другое тоже должно делиться на 3, и $x^2 - 2y^2$ делится на 9. Если же ни x, ни y не делятся на 3, то x^2 и y^2 дают остаток 1 при делении на 3, и левая часть уравнения не делится на 3.

Пусть теперь $x^2 - 2y^2 = 2005$. Если хотя бы одно из чисел x, y делится на 5, то второе тоже делится на 5, и тогда левая часть делится на 25, а 2005 на 25 не делится. В противном случае левая часть на 5 не делится, поскольку тогда каждое из чисел x^2 и y^2 при делении на 5 дает остаток 1 или 4, а ни одно из чисел $1-2\cdot 1$, $1-2\cdot 4$, $4-2\cdot 1$ и $4-2\cdot 4$ не делится на 5.

Второй способ. Если число $x^2 - 2y^2$ нечетно, то x нечетно, так что $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ и, следовательно, $x^2 - 2y^2 \equiv 1$ или $-1 \pmod 8$.

22. а) $11^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + \ldots + 5^2 + 6^2$. Уравнение $(x-5)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x+4)^2 + (x+5)^2 = y^2$ после раскрытия скобок и приведения подобных принимает вид $11x^2 + 110 = y^2$. Замена $y = 11z$ и сокращение на 11 дают $x^2 + 10 = 11z^2$. Наименьшее по величине натуральное z, удовлетворяющее этому уравнению, равно 1. При этом $y = = 11$.

б) Поскольку $x^2 - 1 = 11z^2 - 11$, то $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ делится на 11. Значит, $x = 11t \pm 1$. Значения x = 1, 10, 12, 21 не подходят, а при x = 23 имеем z = 7, т.е. y = 77.

в) Поскольку $1^2 - 11\cdot 1^2 = -10$ и $10^2 - 11\cdot 3^2 = 1$, то уравнение $x^2 - 11z^2 = -10$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

23. Случай $b = 0$ тривиален: достаточно взять $u = v = 0$ и $w \neq 0$.

Пусть $b \neq 0$. Если $x^2 + ay^2 \neq 0$, домножим обе части равенства $x^2 + ay^2 = -b(z^2 + at^2)$ на $x^2 + ay^2$ и воспользуемся формулой

$$\left(x^2 + ay^2\right)^2 = -b\left((xz - ayt)^2 + a(xt + yz)^2\right).$$

Следовательно,

$$-b = \left(\frac{b(xz - ayt)}{x^2 + ay^2}\right) + a\left(\frac{b(xt + yz)}{x^2 + ay^2}\right)^2.$$

Значит, можно взять $u = \dfrac{b(xz - ayt)}{x^2 + ay^2}$, $v = \dfrac{b(xt + yz)}{x^2 + ay^2}$ и $w = 1$.

Если же $x^2 + ay^2 = 0$, то $z^2 + at^2 = 0$ и можно в случае $x^2 + y^2 \neq 0$ взять $u = x$, $v = y$, $w = 0$. А в случае $x = y = 0$ можно взять $u = z$, $v = t$ и $w = 0$.

24. Можно считать, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Рассмотрим натуральные числа a и b, для которых $a^2 - db^2 = 1$. Тогда числа $x_1 = ax + dby$ и $y_1 = bx + ay$ натуральные. Формулы $x_{n+1} = ax_n + dby_n$ и $y_{n+1} = bx_n + ay_n$ дают бесконечную последовательность решений.

25. а) При любом натуральном a, не являющемся квадратом натурального числа, а также при $a = 0$. б) При $a = 0$ число d должно быть квадратом, а при $a \neq 0$ число d должно не быть квадратом.

26. б) Поскольку $n^2 - (n^2 + 1) = -1$, то

$$\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^2 \left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

откуда $\left(2n^2 + 1 - 2n\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n^2 + 1 + 2n\sqrt{n^2+1}\right) = 1$. Мы нашли решение $(x; y) = (2n^2 + 1; 2n)$ уравнения Пелля в натуральных числах. А если есть одно, есть и бесконечно много.

в) *Указание.* $(n^2+1)^2 - (n^2+2)n^2 = 1$.

г) *Указание.* $(n^2-1)^2 - (n^2-2)n^2 = 1$.

27. Воспользуйтесь предыдущим упражнением и тем, что

а) $(a^2+1)(a^2+1) = (a^2+1)^2$;

б) $(a^2-1)(a^2-1) = (a^2-1)^2$ (случай a = 1 разберите отдельно; впрочем, он очевиден);

в) $(a^2+1)(0^2+1) = a^2 + 1$;

г) $(a^2-1)(1^2-1) = 1^2 - 1$ (случай a = 1 требует отдельного рассмотрения);

д) $(a^2+1)(1^2-1) = 1^2 - 1$;

е) $(a^2-1)(0^2+1) = a^2 - 1$ (и опять случай a = 1 требует отдельного рассмотрения).

28. а) Если y четно, то при делении на 4 правая часть уравнения дает остаток 3, а левая 1. Если y нечетно, то правая часть делится на 8; поскольку ни $a^2 + 1$, ни $x^2 + 1$ не делятся на 4, то левая часть на 8 не делится. в) Если x нечетно, то $x^2 - 1$ делится на 4 (и даже на 8); с другой стороны, $y^2 + 1$ не делится на 4. Если x четно, то число $x^2 - 1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p = 4n - 1$. Возведя обе части сравнения $y^2 \equiv -1 \pmod p$ в степень $2n - 1$, получим $y^{p-1} = (y^2)^{2n-1} = -1 \pmod p$. Последнее сравнение противоречит малой теореме Ферма (о которой можно прочитать в «Кванте» №1, 3 и 4 за 2000 год).

29. а) Если $(x; y; z; t) = (2+a; 2-a; b-1; -b-1)$, то $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = (2+a)^3 + (2-a)^3 + (b-1)^3 + (-b-1)^3 = = 14 + 12a^2 - 6b^2$. Приходим к уравнению $12a^2 - 6b^2 = -12$, т.е. $b^2 - 2a^2 = 2$.

б) Пусть x = 1. Замена $Y = y + 1$ и $Z = z + 1$ сводит задачу к уравнению $Z^2 - 3Y^2 = -2$, которое имеет бесконечно много решений.

в) Рассмотрите числа 1, 2 и $y^2 + 1$, где y – натуральное число, для которого существует такое натуральное число x, что $x^2 - 2y^2 = 1$.

г) Полагая x = 1, получаем уравнение $(a^2+1)(v^2+1) = u^2 + 1$, т.е. $u^2 - (a^2+1)v^2 = a^2$. Это уравнение имеет целочисленное решение $(u; v) = (a; 0)$. Поэтому оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

30. а) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел m и n, для которых $n^2 + 1 = 5m^2$ и $m > 5$. При этом $m = \sqrt{(n^2+1)/5} < n/2$ и $n!$ делится на $n^2 + 1$, так как при $m > 5$ в произведении $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-1)n$ есть множители 5, m и $2m$. б) В силу равенства $n^2 - (n^2+1)\cdot 1 = -1$ существуют сколь угодно большие натуральные числа d, для которых уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах – а следовательно, и бесконечно много.

Есть и другие способы доказательства. Например, можно воспользоваться разложением многочлена $x^{105} + 1$ на неприводимые многочлены с целыми коэффициентами (подробности – в статье «Многочлены деления круга» в «Кванте» №1 за 1998 год) или разложением

$$64m^{12}+1=\left(4m^4+1\right)\left(4m^4-4m^3+\right.$$
$$\left.+2m^2-2m+1\right)\left(4m^4+4m^3+2m^2+2m+1\right).$$

31. Неравенство $\left|\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}\right|<\frac{1}{2}$ можно записать в виде $\left|a^2-b^2-2ab\right|<2$, откуда $(a-b)^2-2b^2=\pm1$. Значит, $(a-b;\ b)=(1;\ 1),\ (3;\ 2),\ (7;\ 5),\ (17;\ 12)$ или $(41;\ 29)$, откуда $(a;\ b)=(2;\ 1),\ (5;\ 2),\ (12;\ 5),\ (29;\ 12)$ или $(70;\ 29)$. Треугольник с катетами 29 и 12 расположить можно, ибо $29+\frac{12}{2}<40$ и $12+\frac{29}{2}<32$. А треугольник с катетом 70 расположить нельзя, ибо $70^2>40^2+32^2$.

32. Надо решить в натуральных числах уравнение

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2},$$

т.е. $2n(n+1)=k(k+1)$. Умножив обе части на 2, получаем уравнение

$$(2n+1)^2-1=2k^2+2k.$$

Обозначим $x=2n+1$ и еще раз умножим на 2 обе части уравнения:

$$2x^2-2=(2k+1)^2-1.$$

Обозначив $2k+1=y$, получаем уравнение $2x^2-1=y^2$, которому, как мы знаем, удовлетворяют числа вида $x=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2m+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2m+1}\right)\Big/\left(2\sqrt{2}\right)$. Следовательно, $n=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2m+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2m+1}-2\sqrt{2}\right)\Big/\left(4\sqrt{2}\right)$, где m – натуральное число.

33. а) Применим индукцию для доказательства того, что соседние члены рассматриваемой последовательности удовлетворяют уравнению. *База.* $0^2-m\cdot0\cdot1+1^2=1$. *Переход.* В последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ за каждой парой $a_k=x$, $a_{k+1}=y$ следует пара $(a_{k+1};\ a_{k+2})=(a_{k+1};\ ma_{k+1}-a_k)=(y;\ my-x)$. Очевидно,

$$y^2-my(my-x)+(my-x)^2=y^2-(my-x)(my-(my-x))=$$
$$=y^2-(my-x)x=x^2-mxy+y^2,$$

что и требовалось.

Теперь докажем, что других решений в целых неотрицательных числах у рассматриваемого уравнения нет. Предположим, что $X^2-mXY+Y^2=1$ и $0\le X\le Y$. Если при этом $X=0$, то, очевидно, $Y=1$. Если же $X>0$, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases}y=X,\\ my-x=Y.\end{cases}$$

Очевидно, $x=mX-Y$ и $y=X$. Если $mX-Y<0$, то $mXY<Y^2$ и $1=X^2-mXY+Y^2>X^2\ge1$, что невозможно. Значит, $x=mX-Y\ge0$. Если $x=0$, то $y=1$. Если же $x>0$, то пара натуральных чисел $(x;\ y)$ удовлетворяет равенству $x^2-mxy+y^2=1$ и условиям $x<y=X\le Y$ (проверьте!). Переходя таким образом от пары $(X;\ Y)$ к предшественнице $(x;\ y)$, затем от $(x;\ y)$ – к ее предшественнице и так далее, мы рано или поздно должны будем остановиться, а остановиться сможем лишь тогда, когда получим решение $(x;\ y)=(0;\ 1)$. Значит, за конечное число операций вида $(X;Y)\to(x;y)$ мы из любого решения в натуральных числах получим решение $(0;\ 1)$. Поэтому, идя по этой цепочке в обратном направлении, т.е. начав с пары $(0;\ 1)$ и многократно выполняя преобразование $(x;y)\to(X;Y)$, мы получим любое решение уравнения в целых неотрицательных числах $x\le y$.

б) *Первый способ.* Рассуждайте по индукции, предварительно доказав тождество $\varphi_{n+4}=3\varphi_{n+2}-\varphi_n$.

Второй способ. Уравнение $x^2-3xy+y^2=1$ заменой $y=x-z$ можно привести к виду $z^2+zx-x^2=1$. Решения $(x;z)=(\varphi_{2n};\varphi_{2n-1})$ соответствуют решениям исходного уравнения в неотрицательных целых числах x и y, удовлетворяющих неравенству $x\ge y$. Значит, $(x;y)=(x;x-z)=(\varphi_{2n};\varphi_{2n}-\varphi_{2n-1})=(\varphi_{2n};\varphi_{2n-2})$.

Третий способ. Приведите уравнение к виду $(2x-3y)^2-5y^2=4$, вспомните следствие теоремы 7 (см. предыдущий номер журнала) и рассмотрите два случая: $2x-3y>0$ и $2x-3y<0$.

34. а) Для $p=2$ годятся $x=y=1$. Для $p=17$ годятся $x=4$, $y=0$. Для любого другого простого p рассмотрим числа вида x^2, где $x=0,\ 1,\ \ldots,\ (p-1)/2$, и числа вида $34y^2-1$, где $y=0,\ 1,\ \ldots,\ (p-1)/2$. Докажите, что как $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида x^2 дают разные остатки при делении на p, так и $(p+1)/2$ рассматриваемых чисел вида $34y^2-1$ дают разные остатки при делении на p. Поскольку $\frac{p+1}{2}+\frac{p+1}{2}>p$, то хотя бы одно число одного вида сравнимо по модулю p с числом другого вида, т.е. найдется такая пара $(x;\ y)$, что x^2-34y^2+1 делится на p.

г) Воспользуйтесь китайской теоремой об остатках, т.е. тем, что существуют такие числа x и y, для которых $x\equiv x_1 \pmod{m_1}$, $x\equiv x_2 \pmod{m_2}$, $y\equiv y_1 \pmod{m_1}$ и $y\equiv y_2 \pmod{m_2}$.

е) Если бы существовало решение в целых числах, то существовало бы и решение, где x и y – натуральные числа. Среди всех таких решений нашлось бы решение с наименьшей возможной величиной y. Поскольку

$$35^2-34\cdot6^2=35^2-(35-1)(35+1)=1,$$

то

$$x^2-34y^2=\left(x-y\sqrt{34}\right)\left(35+6\sqrt{34}\right)\left(35-6\sqrt{34}\right)\left(x+y\sqrt{34}\right)=$$
$$=\left(35x-204y-(35y-6x)\sqrt{34}\right)\left(35x-204y+(35y-6x)\sqrt{34}\right).$$

Докажем неравенства $35x-204y>0$, $35y-6x>0$ и $35y-6x<y$. Поскольку $\frac{3}{17}>\frac{35}{204}$, то достаточно доказать, что

$$\frac{6}{35}x<y<\frac{35}{204}x.$$

Первое совсем легко: если $\frac{6}{35}x\ge y$, то

$$-1=x^2-34y^2\ge\frac{35^2}{36}y^2-34y^2=\frac{y^2}{36}>-1,$$

что неверно. Второе неравенство доказать чуть сложнее. Если $y\ge\frac{35}{204}x$, то

$$x^2-34y^2\le\frac{204^2}{35^2}y^2-34y^2=\frac{-34y^2}{35^2}.$$

При $y\ge7$ противоречие очевидно: $\frac{34y^2}{35^2}>1$. А для каждого из значений $y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ и 6 легко проверить, что $34y^2-1$ не является квадратом целого числа.

35. а) $3a^2-2b^2=\left(a\sqrt{3}-b\sqrt{2}\right)\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)=$
$=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2001}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2001}=$
$=\left(\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\right)^{2001}=(3-2)^{2001}=1.$

б) Воспользуемся формулой $\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2 = (5a\pm4b)\sqrt{3}+(5b\pm6a)\sqrt{2}$. Пусть a, b – натуральные числа и $3a^2-2b^2=1$. Тогда $3(5a-4b)^2-2(5b-6a)^2=1$. Если $5a-4b\le 0$, то $3a^2-2b^2\le 3\left(\frac{4}{5}b\right)^2-2b^2=-\frac{2}{25}b^2<0$. Значит, $5a-4b>0$. Если $5b-6a\le0$, то $3a^2-2b^2\ge \ge 3\left(\frac{5}{6}b\right)^2-2b^2=\frac{1}{12}b^2$. Осталось проверить значения $b = 1, 2, 3$. Подходит только $b = 1$, которому соответствует $a = 1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам теорем 2, 3, 5, 9.

36. а) Вспомнив пункт б) упражнения 20, видим: годятся $a=\varphi_{2n-1}$ и $b=\varphi_{2n+1}$, где n – натуральное число. в) Если $a = b$, то $c=2+\frac{1}{a^2}$, так что $a = 1$ и $c = 3$. Пусть $c\ne3$ и $a < b$, причем b – наименьшее возможное. Положим $A = ca - b$ и $B = a$. Очевидно,

$$A=ca-b=\frac{a^2+1}{b}<a+1 .$$

Значит,

$$0<A\le a=B<b$$

и

$$A^2+B^2+1=A^2+a^2+1=A^2+Ab=A(A+b)=ABc .$$

Получили противоречие: число b оказалось не самым маленьким из возможных!

д) Пусть $x^2-\left(n^2-4\right)y^2=-4$, где x, y – натуральные числа. Число x той же четности, что и число ny. Значит, число $a=(x+ny)/2$ натуральное. Как легко убедиться, $a^2+y^2+1=ayn$.

37. а) Случай $a = b$ невозможен: число $\frac{2a^2}{a^2-1}=2+\frac{2}{a^2-1}$ не может быть целым ни при каком натуральном a.

Предположим, что при некотором натуральном t уравнение

$$x^2-txy+y^2+t=0 \qquad (*)$$

имеет решения в натуральных числах x, y. Рассмотрим наименьшее натуральное $x = a$, для которого существует натуральное $y = b < a$, удовлетворяющее равенству (∗). При фиксированных t и b уравнение $x^2-txb+b^2+t=0$ – квадратное относительно x. Если оно имеет натуральный корень a, то по теореме Виета оно имеет и целый корень $A = tb - a$. Если $A\le0$, то

$$a^2-tab+b^2+t=a(a-tb)+b^2+t>0 ,$$

что неверно. Значит, $A\ge a$. Если $A = a$, то дискриминант равен нулю:

$$(tb)^2-4\left(b^2+t\right)=0 ,$$

откуда $4t=\left(t^2-4\right)b^2\ge t^2-4$, так что $t\le4$; но при $t = 1, 2, 3, 4$ равенство $4t=\left(t^2-4\right)b^2$ не имеет места.

Итак, $A > a$. По теореме Виета, $aA=b^2+t$ и $a + A = tb$. Поэтому

$$b^2+t-tb=aA-a-A=(a-1)(A-1)-1\ge$$
$$\ge b(b+1)-1=b^2+b-1 ,$$

откуда

$$t(1-b)\ge b-1 .$$

Это возможно лишь при $b = 1$, причем все неравенства должны обращаться в равенства, т.е. $a = 2$, $A = 3$, $t = 5$.

б) Два решения найти легко: $(x; y) = (1; 2)$ или $(1; 3)$. Из каждого решения $(x; y)$, где $x < y$, можно получить новое решение $(y; 5y - x)$. Действительно, $(5y-x)^2-5(5y-x)y+y^2=x^2-5xy+y^2$. При этом $5y - x > 4y > y$. Таким образом, любые два соседних члена любой из последовательностей

1, 2, 9, 43, 206, 987,…,

1, 3, 14, 67, 321, 1538,…,

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y - x$, дают решение интересующего нас уравнения. На самом деле мы нашли все решения в натуральных числах! Докажем это. Пусть $0 < X < Y$ и $X^2-5XY+Y^2+5=0$. Рассмотрим преобразование $(X;Y)\to(x;y)$, где $x = 5X - Y$ и $y = X$. Если $x < X$, то $\min(x,y)<\min(X,Y)$, так что удалось получить «меньшее» решение в натуральных числах. Если же $5X-Y\ge X$, то $5=(5X-Y)Y-X^2\ge XY-X^2 = X(Y-X)\ge X$. Перебрав значения $X = 1, 2, 3, 4, 5$, находим $(X; Y) = (1; 2)$ или $(1; 3)$.

39. Обозначим для краткости $\alpha=\frac{\sqrt5+1}{2}$ и $\beta=\frac{\sqrt5-1}{2}$. Тогда

$$\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^n-2=\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n=\left(\alpha^n-\beta^n\right)^2 .$$

Осталось доказать, что число $a_n=\alpha^n-\beta^n$ является целым, если n четно, и в $\sqrt5$ раз больше целого числа, если n нечетно. Это можно сделать по индукции, проверив равенства $a_1=1$ и $a_2=\sqrt5$ и рекуррентную формулу

$$a_{n+2}=\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}=$$
$$=\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)(\alpha+\beta)-\alpha\beta\left(\alpha^n-\beta^n\right)=a_{n+1}\sqrt5-a_n .$$

40. а) *Первый способ.* Пусть $\alpha=2+\sqrt3$ и $\beta=3\cdot\left(2+\sqrt3\right)$. Тогда числа $a=\left(2+\sqrt3\right)^m+\left(2-\sqrt3\right)^m$ и $b=3^n\left(2+\sqrt3\right)^n+3^n\left(2-\sqrt3\right)^n$ целые, причем a не делится на 3, а b – делится. Очевидно, $\left[\left(2+\sqrt3\right)^m\right]=a-1$ и, поскольку $3\left(2-\sqrt3\right)=\frac{3}{2+\sqrt3}<1$, то $\left[3^n\left(2+\sqrt3\right)^n\right]=b-1$.

Второй способ. Числа $a=\left(\left(2+\sqrt3\right)^m+\left(2-\sqrt3\right)^m\right)/2$ и $b=\left(\left(1+\sqrt2\right)^n+\left(1-\sqrt2\right)^n\right)/2$ – натуральные, причем для некоторых натуральных c и d имеем $a^2-3c^2=1$ и $b^2-2d^2=(-1)^n$. Если $\left[\left(2+\sqrt3\right)^m\right]=\left[\left(1+\sqrt2\right)^n\right]$, то в случае нечетного n имеем $2a - 1 = 2b$, что невозможно, а в случае четного n имеем $2a - 1 = 2b - 1$, так что $a = b$, откуда $3c^2=2d^2$, что невозможно для натуральных чисел c и d.

Третий способ предложил Г.Челноков. В статье «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказано следующее утверждение: если α и β – положительные иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, то для любых натуральных чисел m и n целые части чисел $n\alpha$ и $m\beta$ различны. В таком случае числа 10^α и 10^β имеют разное количество цифр, так что достаточно доказать существование таких положительных иррациональных α и β , что $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ и числа 10^α и 10^β иррациональны. Это легко сделать, воспользовавшись несчетностью континуума.

Четвертый способ предложил И.Богданов. Изложим решение, естественное для студента, изучившего теорему о стягивающихся отрезках и счетность множества рациональных чисел. Зафиксируем любое нецелое $\alpha > 4$ и покажем, что для него существует иррациональное β, удовлетворяющее условиям. Для этого обозначим $a_1 = [\alpha] + 1{,}01$ и $b_1 = [\alpha] + 1{,}99$. Тогда

$$b_1 > a_1 > 5$$

и

$$b_1^2 - a_1^2 = (b_1 + a_1)(b_1 - a_1) > 5 .$$

Перенумеруем все рациональные числа отрезка $[a_1; b_1]$, т.е. выпишем все их в виде последовательности $c_1, c_2, c_3, \cdots$ Построим такую последовательность отрезков $[a_k; b_k]$, что

- отрезок $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ лежит в отрезке $[a_k; b_k]$;
- $c_k \notin [a_{k+1}; b_{k+1}]$;
- $b_k^{k+1} - a_k^{k+1} > 5$;
- для любого числа $\beta \in [a_k; b_k]$ целая часть ни одного из чисел β^n, где $n \le k$, не равна целой части ни одного из чисел α^m ни при каком натуральном m.

Поскольку $4^2 - 4 = 12$, то целые части степеней числа α различаются не менее чем на 11. Пусть отрезок $[a_k; b_k]$ построен. Поскольку длина отрезка $\left[a_k^{k+1}; b_k^{k+1}\right]$ больше 5, то в нем содержатся хотя бы четыре отрезка с концами в соседних натуральных числах. Хотя бы в одном из них нет (нецелого!) числа c_k^{k+1} и нет ни одной степени числа α; пусть это отрезок $[n; n+1]$. Положим $a_{k+1} = \sqrt[k+1]{n}$ и $b_{k+1} = \sqrt[k+1]{n+1}$. Тогда

$$b_{k+1}^{k+2} - a_{k+1}^{k+2} = b_{k+1}(n+1) - a_{k+1}n > a_{k+1}(n+1) - a_{k+1}n = a_{k+1} > 5.$$

Построение закончено. Очевидно, общая точка β всех построенных отрезков удовлетворяет условиям.

б) *Первый способ.* Если разрешить себе воспользоваться теоремой 10, то достаточно для каждого простого числа p рассмотреть такие натуральные числа a и b, что $a^2 - pb^2 = 1$, и положить $\alpha = a + b\sqrt{p}$.

Второй способ обходится без использования еще не доказанной нами теоремы 10. А именно, для любого натурального числа $k > 1$ рассмотрим $\alpha_k = k + \sqrt{k^2 - 1}$. Докажем существование такого бесконечного множества натуральных чисел k_n, что $k_n > 1$ и $\left(k_r^2 - 1\right)/\left(k_s^2 - 1\right)$ не является квадратом рационального числа ни для каких двух различных натуральных r и s. (Тогда натуральные числа $x = \left(\left[\alpha_k^m\right] + 1\right)/2 =$

$$= \left[\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right)^m + \left(k - \sqrt{k^2 - 1}\right)^m\right]/2$$ и

$$y = \left[\left(k + \sqrt{k^2 - 1}\right)^m - \left(k - \sqrt{k^2 - 1}\right)^m\right]/\left(2\sqrt{k^2 - 1}\right)$$ удовлетворяют уравнению $x^2 - \left(k^2 - 1\right)y^2 = 1$. Поэтому аналогично второму способу решения пункта а) можно убедиться, что числа α_{k_n} удовлетворяют требованию задачи.) Пусть $k_1 = 2$ и $k_{n+1} = \left(k_n^2 - 1\right)!$, где n – натуральное число. Тогда k_{n+1} делится на каждое из чисел $k_r^2 - 1$, где $r = 1, 2, \ldots, n$. Значит, числа $k_{n+1}^2 - 1$ и $k_r^2 - 1$ взаимно просты, откуда и следует нужное нам утверждение.

Третий способ. Достаточно построить такую последовательность положительных иррациональных чисел α_1, α_2, α_3, … и такую последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, что для любых натуральных m и n число $\left[\alpha_m^n\right] + 1$ делится на p_m и не делится на p_k ни при каком $k < m$.

Лемма. *Для любого натурального числа a уравнение $ax + 1 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Доказательство. Для любого натурального r положим $y = ar + 1$ и $x = ar^2 + 2r$.

Лемма доказана. Начнем построение. Положим $p_1 = 3$ и $\alpha_1 = 3\left(2 + \sqrt{3}\right)$. Тогда при любом натуральном n число $\left[\alpha_1^n\right] + 1 = 3^n\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + 3^n\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ целое и даже кратное $p_1 = 3$.

Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и $p_1, \ldots, p_n$ уже найдены. Рассмотрим произведение $a = p_1 p_2 \ldots p_n$. Выберем простое число $p_{n+1} > a$ и натуральные числа x и y, для которых $y^2 = ax + 1$ и $y > p_{n+1}$. Пусть $\alpha_{n+1} = p_{n+1}\left(y + \sqrt{ax}\right)$. Тогда

$$\left[\alpha_{n+1}^m\right] + 1 = p_{n+1}^m\left(y + \sqrt{ax}\right)^m + p_{n+1}^m\left(y - \sqrt{ax}\right)^m$$

делится на p_{n+1} и не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$.

«Квант» для «младших» школьников»

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Если фамилия сестры, например, Смородина, то брат может иметь фамилию Смородина или Смородин – однозначно сказать нельзя.

2. 608347 – 491051 = 117296. [1]

3. Лист размером 4×4 сгибается пополам и разрезается по линии сгиба (рис.1,*а*). На одну из полученных половин накладывается лист размером 3×3 так, чтобы оставалась свободной площадь размером 2×1, которая и отрезается

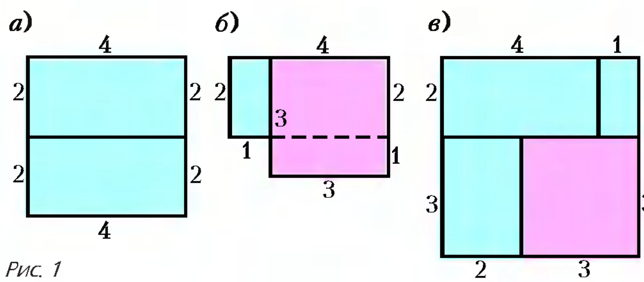


Рис. 1

(рис.1,*б*). Таким образом, квадрат 4×4 разрезан на три прямоугольника размерами 4×2, 3×2 и 2×1. Совместно с квадратом 3×3 из этих прямоугольников составляется квадрат размером 5×5 (рис.1,*в*).

4. Докажем, что число 100 представить нельзя. Предположим противное и обозначим средние числа через x и $x + 1$. Сумма всех ста чисел это сумма 50 слагаемых вида $\left((x - a) + \right.$ $\left. + (x + 1 + a)\right)$. Значит, $100 = 50 \cdot (2x + 1)$, т.е. $2 = 2x + 1$, чего для целого x быть не может. Противоречие.

Докажем теперь, что число $101 = 2 \cdot 50 + 1$ представить можно. Для этого рассмотрим числа –49, –48, …, 0, .., 49, 50, 51. Ясно, что их сумма равна 50 + 51 = 101. Это представление единственно – подумайте, почему.

5. Поскольку

$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = (a + d) + (b + c),$$

а из попарных сумм чисел 13, 15, 16, 20 и 22 совпадают только 13 + 22 = 15 + 20 = 35, то $a + b = 16$, $c + d = 35 - 16 = 19$. Итак, натуральные числа a и b одинаковой четности, c и d – разной. Следовательно, суммы $a + c$ и $b + c$ могут находиться либо среди чисел набора {13, 15}, либо среди чисел набора {20, 22}. И в том, и в другом случае $|a - b| = 2$.

Из системы

$$\begin{cases} a + b = 16, \\ |a - b| = 2 \end{cases}$$

находим $a = 7$, $b = 9$ или $a = 9$, $b = 7$. Пусть $a = 7$. Если c – нечетное, то $a + c = 20$, откуда $c = 13$ и $d = 6$.

[1] *Заметим, что индекс почтового отделения редакции «Кванта» изменился – теперь он 119296.*

Если c – четное, то $a + c = 13$, откуда $c = 6$, $d = 13$.
В случае $b = 7$ аналогично рассматриваются уравнения $b + c = 20$ или $b + c = 13$. В любом случае искомый набор составляют числа {6, 7, 9, 13}.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку число $\overline{ab} = a \cdot 10^5 + b$ делится на ab, то число b должно делиться на a. Из равенств $a \cdot 10^5 + b = abc$, $b = ka$, где числа c и k натуральные, получаем $10^5 + k = kac$. Отсюда, поскольку k однозначно, k равно 1, 2, 4, 5 или 8. Замечаем также, что число kc однозначное и $c > 1$. Приступим к поиску примера. Число 100001 не имеет отличных от 1 однозначных делителей. Число 100002 имеет однозначный делитель, кратный 2 и больший 2: число 6. Это и дает пример: $a = \frac{100002}{6} = 16667$, $b = 2a = 33334$. Других примеров нет. В самом деле, числа $5c$ и $8c$ не были бы однозначными. Число $4c$ могло бы равняться лишь 8, но 100004 на 8 не делится.

17. Пусть выбранные числа равны x и y, причем для определенности $x < y$. Так как сумма всех данных чисел равна $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$, то сумма всех чисел, за исключением выбранных, равна $\left(\frac{n(n+1)}{2} - x - y\right)$, и в соответствии с условием получаем

$$xy = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - x - y\right).$$

Это – уравнение с тремя целыми неизвестными x, y, n. Запишем его в виде

$$x(y+2) = n(n+1) - 2y.$$

Учитывая, что $y \le n$, получаем

$$x = \frac{n(n+1) - y}{y+2} \ge \frac{n(n+1) - 2n}{n+2} =$$

$$= \frac{n^2 - n}{n+2} = \frac{(n^2 + 2n) - (3n+6) + 6}{n+2} = n - 3 + \frac{6}{n+2} > n - 3.$$

Итак, $x \ge n - 2$. Таким образом, имеем следующее неравенство: $n - 2 \le x < y \le n$. С учетом того, что все числа целые, получаем не очень-то много различных вариантов – всего лишь три. Рассмотрим их все.

1) $x = n - 2$, $y = n - 1$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-2)(n-1) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-2) - (n-1)\right),$$

откуда, после упрощений, $2 = 6$, что невозможно.

2) $x = n - 2$, $y = n$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-2)n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-2) - n\right),$$

откуда, после упрощений, $n = 4$. Тогда $x = 2$, $y = 4$. И действительно, среди чисел 1, 2, 3 и 4 можно выбрать два (2 и 4), произведение которых вдвое больше суммы двух других (1 и 3).

3) $x = n - 1$, $y = n$. Тогда исходное уравнение имеет вид

$$(n-1)n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) - n\right),$$

откуда, после упрощений, $n = 1$, что невозможно, поскольку $n \ge 3$.

Итак, ответ единственный: $n = 4$.

18. Если $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, то и $\angle AOM = \frac{\pi}{3}$. Значит, треугольник AOM правильный, $MO = MA$. Отсюда по лемме, приведенной ниже, $MO = MI$.

Обратно, если $MO = MA$, то треугольник AOM правильный, $\angle AOM = \frac{\pi}{3}$, $\angle ABM = \frac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 2\angle ABM = \frac{\pi}{3}$.

Лемма. $MA = MI = MC$.

Доказательство леммы (рис.2).

$$\angle IAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{MCN}, \ \angle AIM = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AM} + \overset{\smile}{BN}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{MC} + \overset{\smile}{CN}\right).$$

Значит,

$$\angle IAM = \angle AIM, \ MA = MI.$$

Аналогично, $MI = MC$. Лемма доказана.

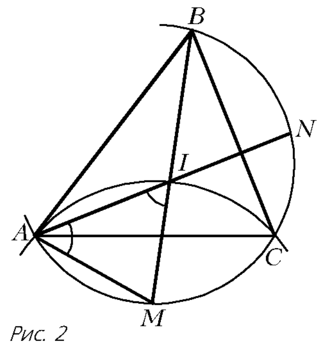


Рис. 2

19. Покажем, что губернатор справится со своей задачей за два дня, если будет действовать следующим образом.

В первый день он приглашает для опроса всех островитян. Получив ответы, губернатор разбивает островитян на группы, объединяя в одну группу островитян, давших один и тот же ответ. Пусть число групп оказалось равным n. Все правдивые островитяне дали правильные ответы. Поэтому все они окажутся в одной группе. Все лжецы окажутся в других $n - 1$ группах. Если, в частности, $n = 1$, то все островитяне правдивые. Если же $n > 1$, то на следующий день губернатор может пригласить для опроса ровно по одному островитянину из каждой группы. Среди приглашенных n островитян будет ровно один правдивый, который даст ответ: «$n - 1$». Этот островитянин, а также все другие, которые объединены с ним в одну группу после опроса в первый день, являются правдивыми. Все остальные островитяне – лжецы.

За один день губернатор может не справиться со своей задачей. Предположим, после первого опроса m островитян ответили, что среди опрашиваемых k лжецов, а k островитян ответили, что среди опрашиваемых m лжецов. Такие ответы могли быть получены и в случае, когда среди опрашиваемых m правдивых и k лжецов, но также и в случае, когда среди опрашиваемых k правдивых и m лжецов. Таким образом, для того чтобы установить истину, губернатору, вообще говоря, одного дня не достаточно.

20. Удобно ввести условную единицу длины, равную 10 метрам. Тогда мы имеем зал размером 9×9, разбитый на комнаты 1×1. Во всех трех случаях ключ к решению один: раскрасим комнаты в шахматном порядке в черный и белый цвета так, чтобы угловые комнаты были черными. Тогда белых комнат окажется 40, а черных – 41. При этом каждая открытая дверь «принадлежит» двум соседним комнатам разного цвета. Таким образом, общее число открытых дверей равно суммарному количеству открытых дверей в белых комнатах и оно же равно суммарному количеству открытых дверей в черных комнатах. А дальше решим каждый пункт условия отдельно.

а) Из вышеизложенного следует, что в каждой белой комнате открыто не более 1 двери, значит, всего открыто не больше $1 \times 4 = 40$ дверей. Рисунок 3 подтверждает, что

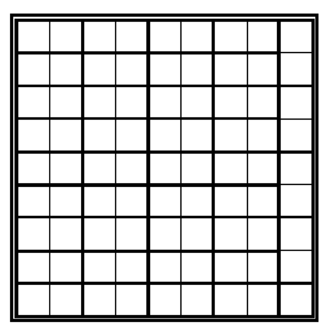


Рис. 3

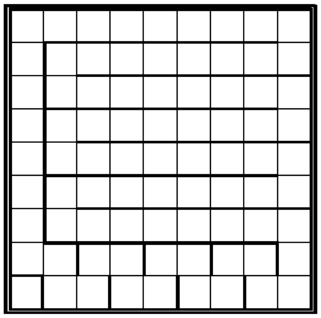


Рис. 4

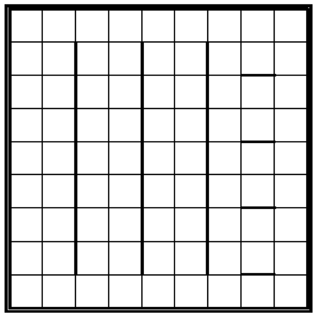


Рис. 5

такое значение достижимо (на нем открытые двери обозначены тонкими линиями, а закрытые – жирными).
б) Здесь в каждой белой комнате открыто не более 2 дверей, значит, всего открыто не больше $2 \times 40 = 80$ дверей. Рисунок 4 подтверждает, что такое тоже возможно.
в) Если здесь пойти тем же путем, то можно получить, что число открытых дверей не превышает $3 \times 40 = 120$. Однако практически достичь такого значения невозможно. Оказывается (вот некий легкий парадокс!), точнее ограничение сверху могут дать... черные комнаты, хотя их и больше! Дело в том, что 4 угловые черные комнаты имеют всего по 2 двери, остальные 37 черных комнат – больше чем по 2 двери. Поэтому общее число открытых дверей в черных комнатах не превышает $2 \times 4 + 3 \times 37 = 119$. А уж такое-то значение достижимо (рис.5).

Калейдоскоп «Кванта»

1. n.
2. Нет. Рассмотрите множество вершин правильного 11-угольника.
3. См. рис.6.
4. 6 осей, проходящих через середины противоположных ребер, и 3 оси, проходящие через центры противоположных граней.

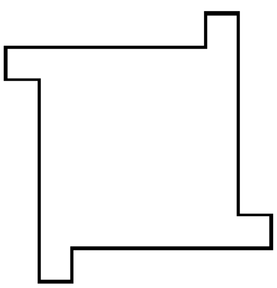


Рис. 6

5. 3 оси, проходящие через середины противоположных ребер.
6. Выбрав некоторую ось симметрии l, докажите, что для любой оси симметрии m прямая, симметричная прямой m относительно l, тоже является осью симметрии. Таким образом, все оси симметрии, скрещивающиеся с прямой l или оси, пересекающие l, но не перпендикулярные ей, разбиваются на пары. (Честно говоря, если количество осей симметрии конечно, то они проходят через одну точку. Но в решении задачи можно обойтись и без доказательства этого факта.) А для любой оси симметрии m, перпендикулярной прямой l и пересекающей прямую l, докажите, что прямая, проходящая через точку их пересечения перпендикулярно обеим прямым, тоже является осью симметрии.
7. а) Сечение этого тела плоскостью α, проходящей через оси цилиндров, – квадрат. Поэтому тело имеет плоскость симметрии α и еще четыре перпендикулярные α плоскости, проходящие через оси симметрии квадрата. б) Тело имеет 9 плоскостей симметрии (как куб).
8. а) $8 \cdot 3! = 48$; б) $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$; в) $20 \cdot 3! = 120$; г) $12 \cdot 5 \cdot 2 = 120$. Половина самосовмещений сохраняют ориентацию, половина – меняют.
9. а) $6!/24 = 30$; б) $8!/24 = 1680$; в) $12!/60 = 7983360$; г) $20!/60 = 40548366802944000$.
10. Поверните правильный пятиугольник вокруг его центра на угол, не кратный 72°.
11. Одна точка; две точки; вершины правильного многоугольника; объединение множества вершин правильного многоугольника с его образом при повороте вокруг центра многоугольника.

Нелинейные элементы в электрических цепях

1. Сопротивление надо уменьшить на 200 мОм.

2. $a = \dfrac{1}{\sqrt{P_X\left(R_2R_3/R_1\right)^3}} = 0{,}125\ \text{А}/\text{В}^2$.

3. $I_0 = \dfrac{\mathsf{E} - U_0}{R} = 5 \cdot 10^{-3}$ А; $q = C\left(\mathsf{E} - U_0\right) = 5 \cdot 10^{-4}$ Кл;

$Q_R = \dfrac{C\left(\mathsf{E} - U_0\right)^2}{2} = 12{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Сфера, касающаяся ребер правильной пирамиды

1. $R_1 = \dfrac{a(2b-a)}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$, $b > \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

2. $r = \dfrac{1}{3}h$, $R_1 = \dfrac{1}{3}h\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)$.

3. $R_1 = 4R\sin\dfrac{\gamma}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\gamma}{2}\right)$, $0^\circ < \gamma < 60^\circ$.

4. $\gamma \approx 37^\circ$ и $\gamma \approx 86^\circ$.

5. При $n = 6$ $\cos\alpha \approx 0{,}640$ ($\alpha \approx 50^\circ 10'$).

LXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. БАО = 143. *Решение.* Если Б ≥ 2, то БА ≥ 20 и БАО > 200, так что $\text{БАО} \cdot \text{БА} \cdot \text{Б} > 200 \cdot 20 \cdot 2 = 8000 > 2002$. Значит, Б = 1.
Разложим число 2002 на простые множители: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Теперь легко выписать все начинающиеся на цифру 1 двузначные делители числа 2002. Это числа 11, 13 и $2 \cdot 7 = 14$. Вычислим соответствующие частные: 2002 : 11 = = 182, 2002 : 13 = 154 и 2002 : 14 = 143. Ответ очевиден: БАО = 143.
2. 2 или 6. *Решение.* Фигура состоит из 22 клеток. Если получилось x трехклеточных уголков и y четырехклеточных, то

$3x + 4y = 22$.

Очевидно, x четно и $x < 8$, так что $x = 0$, 2, 4 или 6. Значения $x = 0$ или 4 не подходят: y получается нецелым. При $x = 2$ или 6 получаем $y = 4$ или, соответственно, $y = 1$. Оба случая возможны, как показано на рисунке 7.

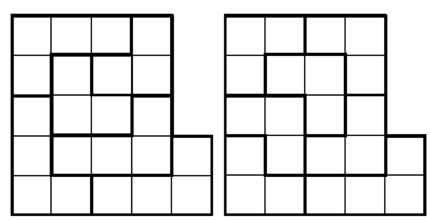


Рис. 7

3. 218, 219, 220, 221, 222, 224, 225, 226 и 227. *Решение.* Обозначим наименьшее из десяти чисел буквой x. Тогда

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) - (x+y) = 2002,$$

где $x + y$ – вычеркнутое число (так что $0 \leq y \leq 9$). Упростим уравнение:

$$10x + 45 - x - y = 2002, \text{ т.е. } 9x = 1957 + y.$$

Сумма 1957 + y делится на 9 при y = 5. (И ни при каком другом, поскольку, как вы помните, $0 \le y \le 9$). Значит, x = 1962 : 9 = 218.

4. См. рис.8. (При помощи компьютера проверено, что больше 33 клеток закрасить нельзя.)

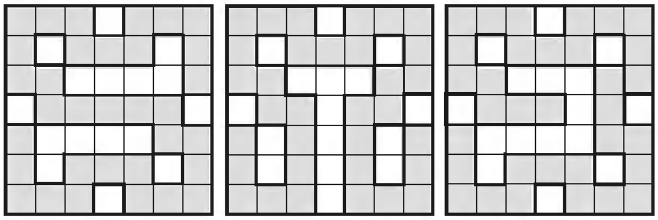


Рис. 8

5. Вопрос может звучать так: «Верно ли, что и Алеше Поповичу, и Добрыне Никитичу досталось хотя бы по одной серебряной монете?» Если ответ утвердительный, то обе монеты Ильи Муромца – золотые. Если отрицательный, то Илье достались две серебряные монеты. А если Илья не сможет ответить ни «да», ни «нет», то он получил за службу золотую и серебряную монеты.

Можно было задать и другие вопросы, например:

– Верно ли, что хотя бы одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

– У тебя больше золотых монет, чем у Алеши Поповича?

– Если я заберу одну из твоих монет и дам вместо нее золотую, то станет ли у тебя больше золота? (Заметьте, что в этом вопросе не упомянуты монеты, доставшиеся двум другим богатырям!)

6. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит из нечетного числа цифр, а последний – из четного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: не более чем 7 покрашенных цифр вместе с не более чем $8 \cdot 4 = 32$ непокрашенными дают не более чем 39 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль) дает 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

7 класс

1. 109. *Решение.* Пусть год-палиндром $\overline{abba}$. Если b = 9, то через 11 лет наступит год-палиндром $\overline{(a+1)00(a+1)}$. Если b < 9, то следующий год-палиндром $\overline{a(b+1)(b+1)a}$ наступит через 110 лет. Поэтому наибольшее число идущих подряд годов-непалиндромов равно 109.

3. $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$. *Решение.* Поскольку в отредактированном хулиганом примере три сомножителя четные, то и в исходном хотя бы один сомножитель четный. Поэтому произведение было четным и цифра 7 написана хулиганом. Следовательно, слева от знака равенства изменена не более чем одна цифра. Значит, в исходном равенстве слева была хотя бы одна пятерка и, будучи четным числом, произведение оканчивалось на цифру 0.

Вычислим произведение $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$. Поскольку числа 1600 и 2240 отличаются более чем в одном разряде, то один из сомножителей был изменен. Поскольку 2240 не делится на $400 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5$, то одна из пятерок написана хулиганом, а три четверки и другая пятерка – настоящие. Осталось заметить, что $2240 : \left(4^3 \cdot 5\right) = 7$.

4. Приведем два построения (есть и много других).

Первый способ. На рисунке 9 луч AD – биссектриса угла BAB'.

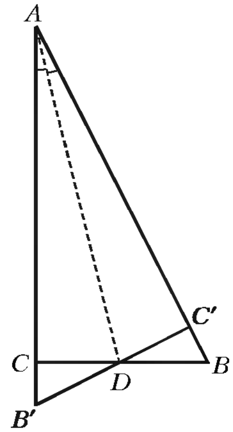


Рис. 9

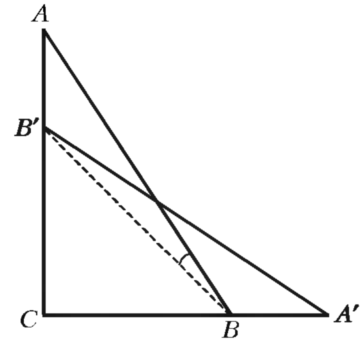


Рис. 10

Второй способ. На рисунке 10

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ .$$

5. См. рис.11. (При помощи компьютера проверено, что больше 42 клеток закрасить нельзя.)

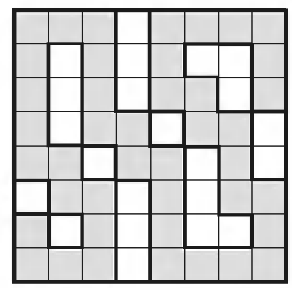


Рис. 11

6. а) Да; б) нет. Поскольку 70% от 11 – это 7,7, то для получения звания надо набрать не менее 8 очков.

а) Семеро участников турнира могли сыграть все партии друг с другом вничью (набрав по 3 очка каждый) и выиграть все партии у остальных 5 шахматистов (набрав еще по 5 очков). б) Если каждый из 8 шахматистов набрал не менее чем по 8 очков, то они вместе набрали не менее $8 \cdot 8 = 64$ очков. Всего в турнире сыграно $12 \cdot 11/2 = 66$ партий. Значит, на долю остальных четверых шахматистов останется не более 66 – 64 = 2 очков. Но между собой они сыграли 6 партий – а значит, должны были в сумме набрать не менее 6 очков.

Избранные задачи для старших классов

1. Пусть O – центр первой окружности, E – точка касания второй окружности с общей касательной. Так как OA = OD, то $\angle ODA = \angle OAD$. Поскольку $OD \parallel AE$, то $\angle DAE = \angle ODA$, откуда $\triangle DEA = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle DCA = \angle DEA = 90^\circ$, что и требовалось.

2. Выигрывает второй. *Решение.* Заметим, что от перестановки горизонталей и вертикалей ничего не меняется. Пусть первый игрок сделал первый ход. Тогда второй мысленно переставит горизонтали и вертикали так, чтобы поставленная шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски. Далее он делает ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. Вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, первый игрок не сможет занять центр доски, поэтому второй всегда сможет сделать ход.

3. а), б). Проведем в треугольнике AMB медианы AF и BG, и пусть N – точка их пересечения. Так как MB = 2ME, то MF = ME. Если $AM \perp BE$, то AE = AF. Если же $\angle AMF < 90^\circ$, то AF < AE. Поэтому $AN = \frac{2}{3}AF \le \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$. Аналогично, $BN \le \frac{1}{3}BC$. С учетом неравенства треугольника $AC + BC \ge 3(AN + NB) > 3AB$.

4. Любые пары (m, n), кроме пар (1, 1), (1, 3) и (3, 1). *Решение.* Если для некоторого n существует вечно живая расстановка клеток в прямоугольнике $1\times n$, то такая расстановка существует и в прямоугольнике $m\times n$ с любым m: нужно просто задать одну и ту же вечно живую расстановку во всех строках.

При $n = 2$ и $n \geq 4$ вечно живые расстановки $1\times n$ существуют: каждая из перечисленных ниже расстановок возвращается в исходное состояние за два шага (Ж – живая клетка, М – мертвая):

$n = 2$	ЖМ $\leftrightarrow$ МЖ	
$n \geq 4$		
n четно	ЖММЖЖММЖ...	$\leftrightarrow$ МЖЖММЖЖМ...
n нечетно	ЖМММЖЖМММЖ...	$\leftrightarrow$ МЖМЖММЖЖМ...

В квадрате 3×3 также есть вечно живая расстановка периода 2:

$$\begin{matrix} Ж\ Ж\ М \\ М\ М\ М \\ М\ Ж\ Ж \end{matrix} \quad\leftrightarrow\quad \begin{matrix} М\ М\ Ж \\ Ж\ М\ Ж \\ Ж\ М\ М \end{matrix}$$

Случай 1×1 очевиден. Осталось рассмотреть прямоугольник 1×3 (случай 3×1 аналогичен). Можно считать (возможно, начав со второго шага), что первая клетка мертва. Тогда остается три варианта, в которых есть живая клетка. Эволюция варианта МЖЖ включает в себя и МЖМ:

$$МЖЖ \to ЖММ \to МЖМ \to ЖМЖ \to МММ,$$

а вариант ММЖ симметричен варианту ЖММ, который также входит в этот пример.

5. Всегда. *Решение.* Пусть m обозначает число новобранцев, стоящих лицом к сержанту слева от него, а n – справа. Вначале пусть сержант станет на левый край шеренги. Тогда $m = 0$. Если $n = 0$, то задача решена. Если же $n > 0$, то пусть сержант передвигается по шеренге слева направо. Если он проходит человека, стоявшего к нему спиной, то m увеличивается на 1, а n не изменяется. Если сержант проходит человека, стоявшего к нему лицом, то m не изменяется, а n уменьшается на 1. Если новобранец стоял боком, то оба числа остаются прежними. Вначале разность $m - n$ отрицательна. В конце (когда сержант дойдет до правого края) $n = 0$ и потому $m - n \geq 0$. Так как число $m - n$ целое и может меняться за один шаг только на 1, то в какой-то момент оно равно нулю, что и требовалось.

6. Используя неравенство треугольника $a + b > c$ и тот факт, что $a^2 - ab + b^2 > 0$, получаем

$$a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) + 3abc >$$
$$> c\left(a^2 - ab + b^2\right) + 3abc = c(a+b)^2 > c\cdot c^2 = c^3.$$

7. Отразим $\triangle DBE$ относительно прямой DE. По свойству вписанных углов $\angle AED = \angle ACD = \angle BCD = \angle BED$, поэтому прямая AE перейдет в прямую BE. Аналогично, прямая CD перейдет в прямую BD. Значит, точка I перейдет в точку B. Поэтому $BF = IF$, $BG = IG$ и $BI \perp FG$. Но луч BI – биссектриса угла FBG, поэтому $\triangle FBG$ равнобедренный, т.е. $BF = BG$. Таким образом, все стороны четырехугольника $BFIG$ равны, что и требовалось.

8. $x = \pm 1$, $y = 0$. *Решение.* Знаки x и y можно выбирать произвольно, поэтому достаточно найти неотрицательные решения. Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) = 2y^2.$$

Пусть $y > 0$. Каждый простой множитель входит в разложение числа y^2 четное число раз. Если он не равен 2, то входит в разложение ровно одного из чисел $x^2 - 1$, $x^2 + 1$. Оба эти числа четны (так как четна правая часть уравнения). При этом в разложении $x^2 + 1$ содержится одна двойка ($x^2 + 1$ ни при каком натуральном x не делится на 4). Как следствие, в разложении $x^2 - 1$ содержится четное число двоек. Таким образом, все простые множители входят в это разложение четное число раз, т.е. $x^2 - 1$ является точным квадратом. Но если два точных квадрата отличаются на 1, то меньший из них равен 0. Значит, в действительности $x = \pm 1$ и $y = 0$.

9. Не могут. *Решение.* Докажем, что при каждом разрезе число нетупых углов увеличивается не менее чем на 2. Действительно, если конец разреза лежит на стороне какого-то из имеющихся многоугольников, то здесь образуется не менее одного нетупого угла. Если же это вершина многоугольника, то угол при ней разбивается на два угла, сумма которых меньше 180°. Значит, тем более один из них нетупой. Если угол многоугольника был нетупым, то оба образовавшихся угла нетупые. Таким образом, при каждом разрезе число нетупых углов увеличивается.

Так как исходный треугольник остроугольный, то вначале число нетупых углов равно трем. После k разрезов оно не меньше чем $2k + 3$. Если все $k + 1$ получившиеся части – тупоугольные треугольники, то число нетупых углов равно $3(k + 1) - (k + 1) = 2k + 2 < 2k + 3$. Получено искомое противоречие.

10. Тангенсы углов треугольника равны 1, 2, 3. *Решение.* Обозначим углы треугольника в порядке неубывания α, β, γ. Тогда $0 < \alpha \leq \pi/3$, поэтому $0 < \operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha$ – натуральное число, то $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\beta + \gamma = \dfrac{3\pi}{4}$, откуда

$$-1 = \operatorname{tg}(\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \quad (\operatorname{tg}\beta - 1)(\operatorname{tg}\gamma - 1) = 2.$$

Ясно, что одна скобка равна 1, а другая 2, откуда $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = 3$ (поскольку $\beta \leq \gamma$).

11. 6. *Решение*. Пусть площади треугольников равны n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Тогда площадь четырехугольника составляет $4n + 6$. Площадь треугольника BCD равна учетверенной площади треугольника ECF. Значит,

$$S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BCD} \leq (4n + 6) - 4n = 6.$$

Осталось показать, что значение 6 возможно. Примером служит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 6$, $BC = 4$ и высотой 2.

12. Всегда.

13. Можно. *Решение*. Впишем круг в квадрат и покрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга. В полученный круг впишем квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Покрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне вписанного квадрата. Далее действуем аналогично. Граничные точки фигуры всегда считаем принадлежащими ей. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, кроме четырех точек касания вписанного круга, а граница каждого круга – белым, кроме четырех вершин вписанного квадрата.

14. Положим $t = 100$, $c = t^3 + t + 1$, $r = \sqrt[3]{c} - t > 0$. Точка A с координатами $(t + r, c)$ лежит на графике функции $y = x^3$, а точка B с координатами (t, c) – на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$. Расстояние AB равно r. Но из равенства $(t + r)^3 = c = t^3 + t + 1$ следует, что $3t^2r + 3tr^2 + r^3 = t + 1$, $3t^2r < t + 1$, $r < \dfrac{t+1}{3t^2} < \dfrac{1}{100}$.

15. Пусть $\{a_n\}$ – данная последовательность, S_n – сумма первых n ее членов, $k_n = S_{n-1}/a_n$. Так как $a_{n+1} > a_n$, то

$$k_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} > \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

По условию k_n и k_{n+1} целые, поэтому $k_{n+1} \leq k_n$. Значит, с некоторого номера N частные равны константе k. Но тогда при $n \geq N$ имеем $a_n = S_{n-1}/k$, откуда $S_n = \dfrac{k+1}{k}S_{n-1}$ и, следовательно, $S_n = \dfrac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}}$. Значит, S_N делится на сколь угодно большую степень числа k. Отсюда $k = 1$, что и требовалось.

16. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, r – ее радиус, $k = \cos\angle BAC$. Докажем, что $T_B O_A \perp AB$. В треугольниках BAC и B_1AC_1 угол BAC общий и

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k.$$

Таким образом, треугольники BAC и B_1AC_1 подобны с коэффициентом k. Пусть X – проекция точки O_A на AB. Отрезки AX и AT_B – это отрезки от вершины A до точек касания соответствующих сторон со вписанной окружностью в подобных треугольниках, поэтому $\dfrac{AX}{AT_B} = k = \cos\angle XAT_B$. Но тогда прямая T_BX перпендикулярна к AX и потому проходит через O_A, откуда $T_BO_A \perp AB$.
Аналогично, $T_CO_A \perp AB$. Очевидно, что $IT_C \perp AB$, $IT_B \perp AC$, причем $IT_C = IT_B = r$. В четырехугольнике $IT_BO_AT_C$ противоположные стороны параллельны и потому равны, откуда $T_BO_A = r$. Аналогично получаем, что и остальные стороны шестиугольника равны r.
Замечание. Из приведенного решения очевидно, что шестиугольник $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ центрально-симметричен. Менее очевидно, что его центр симметрии лежит на прямой, соединяющей центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. В оба момента времени расстояние между велосипедистом и автомобилем было 40 км.
2. $\Delta F = mg(L-2l)/L \approx 480$ Н.
3. Четыре недели. *Указание.* Постройте график, отложив вдоль горизонтальной оси степень свежести яиц (в неделях), а вдоль вертикальной – концентрацию соли в растворе (в граммах на пол-литра воды).

9 класс

1. $l = L(k+1)/(k-1) = 500$ м.
2. $h = l/2$; $t_{\min} = 2\sqrt{2l/g}$.
3. В «черном ящике» может находиться только одна схема, но нумерация контактов может быть различной. При этом получаем $U = I_{12}r$ и $R = r(I_{12}/I_{13} - 1)$ при $I_{12} > I_{13}$ или $U = I_{13}r$ и $R = r(I_{13}/I_{12} - 1)$ при $I_{12} < I_{13}$.

10 класс

1. $v_1 = \sqrt{v^2 + 4u(u+v)(1 - L^2/R^2)}$.
2. $E = \dfrac{mg}{q}\dfrac{1}{1 - 2gL/v^2}$, $v > \sqrt{2gL}$.
3. $R = \tau/C$; $C_1 = C$.

11 класс

1. $F_{\text{тр}} = \dfrac{mv_0^2}{l}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)$.
2. Относительная влажность воздуха в меньшем сосуде вначале, при выравнивании давлений в сосудах, уменьшается до $\varphi_{\min} = \varphi_1(p_1V_1 + p_2V_2)/(p_1(V_1+V_2)) \approx 13{,}3\%$,
а затем, во время процесса диффузии, возрастает до максимального значения $\varphi_{\max} = (\varphi_1V_1 + \varphi_2V_2)/(V_1+V_2) \approx 33{,}3\%$.
3. $t = E/(Bg)$.

Второй теоретический тур

8 класс

1. $\tau = \dfrac{\tau_1\tau_2(v_2 - v_1)}{v_1\tau_1 + v_2\tau_2} = 5$ с. **2.** $s = (2m_{\text{о}}l - m_{\text{д}}L)/(2m_{\text{х}}) = 2{,}72$ м.
3. $M_2 = M_1\dfrac{\rho_2 q}{\rho_1 q - (\rho_2 - \rho_1)(c\Delta t + r)} = 24{,}4$ кг, где $\Delta t = 100\,^\circ$C.

9 класс

1. При $s_2 \neq 0$ $v = (s_1 + s_2)/t$ и $\max(s_1 - s_2; 0) \le l \le s_1$; при $s_2 = 0$ $v = s_1/t$ и $l \ge s_1$.
2. $\tau = \dfrac{\lambda\tau_2}{c(t_3 - t_4)(t_4 - t_0)}\left(\dfrac{t_3 + t_4}{2} - t_0\right) = 6{,}5$ ч.

10 класс

1. $\mu = \dfrac{gR\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{g^2R^2 + v^4\cos^2\alpha}}$.
2. $T = \dfrac{2L}{\alpha v}\left(1 - \left(\dfrac{2-\alpha}{2}\right)^{N-1}\right) \approx \dfrac{2L}{\alpha v} = 200$ с.
Заметим, что последний шарик после соударения приобретает (теоретически!) скорость, превышающую вторую космическую.

11 класс

1. $v_{\min} = \sqrt{2\sqrt{2}gR}$. **2.** $n = \dfrac{1}{\left(1 + \Delta d\left(\sqrt{k}+1\right)/d\right)^2} = \dfrac{1}{4}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
В.Д.Акатьева, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, Л.В.Тишков

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №